ОСНОВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Лектор — Виктор Алексеевич Александров

Программа курса лекций
(4-й семестр, лекции 32 ч., семинары 32 ч., экз.)

5. Геометрия пространств со скалярным произведением

Линейные пространства: определение, линейная зависимость векторов, размерность пространства, подпространство. Примеры линейных пространств и подпространств. Нормированные линейные пространства: определение нормы, открытые и замкнутые множества, сходимость последовательности, замыкание множества, фундаментальная последовательность, полнота и сепарабельность пространства. Пример незамкнутого подпространства норимрованного линейного пространства. Лебеговские функциональные пространства $L_p(G)$: определение и свойства (без доказательств), в том числе — интегральные неравенства Гёльдера и Минковского, полнота и сепарабельность, плотность множества гладких функций. Линейные пространства со скалярным произведением: определение и примеры. Неравенство Коши — Буняковского — Шварца в пространстве со скалярным произведением. Норма, порождённая скалярным произведением. Непрерывность скалярного произведения. Равенство параллелограмма. Гильбертово пространство: определение и примеры. Угол между векторами. Ортогональность векторов. Процесс ортогонализации Грама — Шмидта. Приближение векторами подпространства. Вектор наилучшего приближения. Лемма о существовании и единственности вектора наилучшего приближения. Ортогональная проекция вектора на подпространство. Лемма об эквивалентности понятий «вектор наилучшего приближения» и «ортогональная проекция вектора». Ортогональное дополнение к подпространству. Прямая сумма подпространств. Лемма о разложении гильбертова пространства в прямую сумму подпространств. Ортогональное проектирование на конечномерное подпространство. Коэффициенты Фурье относительно ортогональной системы. Неравенство Бесселя. Ряд Фурье вектора из гильбертова пространства. Полнота ортонормированной системы. Равенство Парсеваля. Замкнутость ортонормированной системы. Гильбертов базис. Теорема о существовании гильбертова базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве (без доказательства). Теорема Рисса — Фишера. Теорема об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств. Критерий полноты ортонормированной системы в сепарабельном гильбертовом пространстве. Тригонометрическая система функций как пример полной ортонормированной системы в $L_2[-\pi,\pi]$.

Литература: основная — 2, 8; дополнительная — 6, 7 (глава III), 9 (глава 1).

6. Ортогональные многочлены

Ортогональные многочлены как результат ортогонализации последовательности мономов. Общие свойства ортогональных многочленов. Свойства нулей ортогональных многочленов. Классические ортогональные многочлены. Стандартизация ортогональных многочленов. Свойства классических ортогональных многочленов (без доказательства). Многочлены Лежандра: производящая функция, рекуррентные соотношения, дифференциальное уравнение, соотношения ортогональности. Формула Родрига для многочленов Лежандра (без доказательства). Теорема о разложении функции в ряд по многочленам Лежандра (без доказательства). Мультипольное разложение кулонова потенциала. Дипольный момент.

Многочлены Эрмита и Лагерра (*изучаются только на семинарах*): производящая функция, рекуррентные соотношения, дифференциальное уравнение, соотношения ортогональности, формула Родрига. Разложение функций в ряды по многочленам Эрмита и Лагерра. Функции Эрмита и Лагерра.

Литература: основная — 4; дополнительная — 7 (глава VII, § 3).

7. Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах

Линейные операторы: определение, примеры и общие свойства. Непрерывные и ограниченные операторы. Норма оператора: определение, свойства и оценка нормы оператора, отображающего конечномерное пространство в конечномерное. Сходимость операторов, свойства сходящихся последовательнсотей операторов. Операторные ряды: определение и свойства сходящихся операторных рядов. Обратимость оператора. Обратный оператор: определение и свойства. Теорема Неймана. Спектр оператора. Резольвента и резольвентвое множество. Простейшие свойства спектра. Линейный функционал и его ядро. Свойства ядра линейного функционала.

Сопряжённое пространство. Теорема Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала. Бра- и кет-векторы. Примеры использования бра- и кет-обозначений для нахождения разложения тождественного опреатора и нахождения резольвентного оператора. Оператор, сопряжённый ограниченному: определение и пример нахождения оператора, сопряжённого к оператору, отображающему кончномерное пространство в конечномерное. Свойства оператора, сопряжённого к ограниченному. Применение сопряжённого оператора к нахождению спектра. Ограниченные самосопряжённые операторы: теоремы о точечном спектре, норме и инвариантном подпространстве. Компактные операторы: определение и простейшие свойства. Теорема о существовании базиса из собственных векторов компактного самосопряжённого оператора (без доказательства).

Литература: основная — 3; дополнительная — 1, 6, 7 (глава IV, §§ 5 и 6), 9 (главы 7 и 8).

8. Интегральные уравнения

Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра и примеры задач, к ним приводящих. Интегральный оператор Гильберта — Шмидта: определение, теоремы о компактности и об операторе, сопряжённом к опертору Гильберта — Шмидта. Решение уравнений с вырожденным ядром. Альтернатива Фредгольма. Уравнения с малым параметром. Ряд Неймана. Метод последовательных приближений. Интегральные уравнения с симметричными ядрами. Теорема Гильберта — Шмидта для интегральных операторов. Разложение решения интегрального уравнения по собственным функциям ядра. Разложение повторного ядра интегрального оператора по его собственным функциям. Теорема Мерсера (без доказательства).

Литература: основная — 5; дополнительная — 6, 7 (глава IX).

Литература

Учебные и методические пособия, изданные в НГУ, доступны в электронном виде на сайте кафедры `http://www.phys.nsu.ru/ok03/`

1. *Абашеева Н. Л.* Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах в примерах и задачах: Метод. пособие. Новосибирск: НГУ, 2007.
2. *Александров В. А.* Геометрия пространств со скалярным произведением: Метод. пособие. Новосибирск: НГУ, 1995.
3. *Александров В. А.* Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах: Метод. пособие. Новосибирск: НГУ, 1996.

4. *Александров В. А.* Ортогональные многочлены: Метод. указания. Новосибирск: НГУ, 1993.
5. *Александров В. А., Колесников Е. В.* Интегральные уравнения: Метод. указания. Новосибирск: НГУ, 1993.
6. *Антоневич А. Б., Князев П. Н., Радыно Я. В.* Задачи и упражнения по функциональному анализу. Минск: Выш. шк., 1978.
7. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.
8. *Подвигин И. В.* Гильбертово пространство в примерах и задачах: Учебно-метод. пособие. Новосибирск: НГУ, 2012.
9. *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики. М.: Мир, 1982. Т. 1.

План семинаров

1-й семинар. — Простейшие свойства сходимости в гильбертовом пространстве: всякая сходящаяся последовательность фундаментальна, ограничена и имеет не более одного предела; всякое конечномерное подпространство замкнуто. Парадоксальные свойства бесконечномерных гильбертовых пространств: существование незамкнутых подпространств и возможность поместить бесконечно много попарно непересекающихся шаров фиксированного радиуса в единичный шар.

2-й семинар. — Вычисление углов в гильбертовом пространстве. Кривая Винера. Равенство параллелограмма. Поляризационные тождества.

3-й семинар. — Процесс ортогонализации Грама — Шмидта. Ортогональное проектирование на конечномерные и бесконечномерные подпространства. Задача наилучшего приближения.

4-й семинар. — Изоморфизм гильбертовых пространств. Вычисление суммы внутренних углов произвольного треугольника. Нахождение ортогонального дополнения к подпространству.

5-й семинар. — Полные ортонормированные системы, состоящие из многочленов, ступенчатых функций и тригонометрических функций.

6-й семинар. — Общие свойства ортогональных многочленов. Многочлены Эрмита: производящая функция; вывод и использование рекуррентных формул.

7-й семинар. — Многочлены Эрмита: вывод и использование соотношений ортогональности и дифференциального уравнения; разложение функций в ряды по многочленам Эрмита.

8-й семинар. — Многочлены Лагерра: производящая функция; вывод и использование рекуррентных формул, соотношений ортогональности и дифференциального уравнения; разложение функций в ряды по многочленам Лагерра.

9-й семинар. — Многочлены Лежандра: применение производящей функции, рекуррентных формул и соотношений ортогональности; разложение функций в ряды по многочленам Лежандра.

10-й семинар. — Вычисление нормы ограниченного оператора и оператора, обратного к данному.

11-й семинар. — Линейные функционалы. Сопряжённый оператор.

12-й семинар. — Спектр и резольвента ограниченного оператора.

13-й семинар. — Бра- и кет-векторы. Компактные операторы.

14-й семинар. — Сведéние дифференциальных уравнений к интегральным и наоборот. Решение интегральных уравнений с вырожденным ядром.

15-й семинар. — Альтернатива Фредгольма. Повторные ядра и резольвента интегрального уравнения.

16-й семинар. — Собственные значения и собственные функции интегральных уравнений с симметричным ядром. Решение неоднородных уравнений Фредгольма с симметричным ядром.

Задания по основам функционального анализа

Задание 4 *(сдать до 15 марта)*

Геометрия пространств со скалярным произведением

1. Докажите, что любом в унитарном пространстве справедливо так называемое поляризационное тождество

$$(x, y) = \frac{1}{4}\Big[(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) - i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)\Big].$$

2. Докажите, что в пространстве $L_p[a, b]$ можно ввести скалярное произведение, согласованное с нормой этого пространства, если и только если $p = 2$.

Напомним, что пространство $L_p[a, b]$ определено для всех $p \geqslant 1$ и состоит из функций $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, для которых интеграл

$$\int\limits_a^b |f(t)|^p \, dt$$

сходится. При этом, по определению полагают

$$\|f\|_{L_p[a,b]} = \left\{ \int\limits_a^b |f(t)|^p \, dt \right\}^{1/p}.$$

3. Найдите углы треугольника, образованного векторами $f_1(t) = 0$, $f_2(t) = t$, $f_3(t) = t^2$ в евклидовом пространстве $L_2[-1,1]$.
4. Пусть L обозначает подпространство пространства $L_2[-1,1]$, натянутое на функции $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = t$ и $f_3(t) = t^2$. Найдите ортогональную проекцию функции $g(t) = e^{-t}$ на L.
5. В пространстве $L_2[-1,1]$ найдите ортогональное дополнение к подпространству S, состоящему из функций $f(t)$, равных нулю при $-1 \leqslant t \leqslant 1/2$.
6. Убедитесь, что система функций $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin t$, …, $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nt$, … является ортонормированной в $L_2[-\pi, \pi]$, но не является базисом этого пространства.

Ортогональные многочлены

7. Как известно, многочлены Чебышёва первого рода $T_n(x)$ ортогональны на промежутке $(-1,1)$ с весом $1/\sqrt{1-x^2}$. Для каждого $n = 0, 1, 2, \ldots$ докажите, что

(а) функция $\cos(n \arccos x)$ является многочленом степени n и

(б) многочлен $T_n(x)$ пропорционален $\cos(n \arccos x)$, т. е. докажите равенство $T_n(x) = C_n \cos(n \arccos x)$, где C_n — некоторая постоянная.

8. Существуют ли промежуток (a, b) и вес $h : (a, b) \to \mathbb{R}$ такие, что последовательность мономов 1, x, …, x^n, … является последовательностью ортогональных многочленов на промежутке (a, b) с весом h?
9. Докажите,что $H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}$ для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$. Здесь $H_n(x)$ — n-й многочлен Эрмита, стандартизованный с помощью производящей функции, т. е. $H_n(x)$ определяется как коэффициент в разложении

$$e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n.$$

Задание 5 *(сдать до 25 апреля)*

10. Докажите,что если n чётно, то $H_n(x)$ является чётной функцией от x, а если n нечётно, то — нечётной.

11. Вычислите интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x H_n(x) H_{n+1}(x)\, dx.$$

12. Разложите в ряд по многочленам Эрмита функцию $\sin 2x$. Обоснуйте сходимость полученного ряда.

13. Вычислите интеграл

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha+1} [L_n^{\alpha}(x)]^2\, dx.$$

Здесь $L_n^{\alpha}(x)$ — n-й многочлен Лагерра, стандартизованный с помощью производящей функции, т. е. $L_n^{\alpha}(x)$ — это коэффициент тейлоровского разложения по переменной t с центром в нуле производящей функции многочленов Лагерра:

$$w\,(x, t, \alpha) = \frac{e^{-xt/(1-t)}}{(1-t)^{\alpha+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha}(x)\, t^n.$$

14. Вычислите интеграл

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)[P_n'(x)]^2\, dx,$$

где $P_n(x)$ — n-й многочлен Лежандра, стандартизованный с помощью производящей функции.

Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах

В задачах 15–21 $M_a : \ell_2 \to \ell_2$ обозначает «диагональный» линейный оператор, действующий по правилу:

$$M_a : (x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots) \mapsto (a_1 x_1,\ a_2 x_2,\ a_3 x_3, \ldots),$$

где $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ — фиксированная ограниченная последовательность комплексных чисел.

15. Докажите, что оператор M_a непрерывен и найдите его норму.

16. Выясните является ли оператор M_a обратимым и если является, то найдите M_a^{-1}.

17. Опишите сопряжённый к M_a оператор и выясните, когда оператор M_a самосопряжён. Выясните, когда оператор M_a унитарен.

18. Найдите точечный спектр оператора M_a.

19. Найдите непрерывный спектр оператора M_a.

20. Найдите остаточный спектр оператора M_a. Укажите резольвентное множество оператора M_a.
21. В каком из двух случаев оператор M_a компактен: если $a_n = \sin\frac{\pi n}{2}$ или если $a_n = (-1)^n n^{-1}$?
22. Покажите, что используя «бра» и «кет» обозначения оператор проектирования P на подпространство, натянутое на единичный вектор x, можно задать формулой $P = |x\rangle\langle x|$.

Задание 6 *(сдать до 30 мая)*

23. Докажите, что для любых самосопряжённых ограниченных операторов $A : H \to H$ и $B : H \to H$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{2}\big|([A,B]x,x)\big| \leqslant \|Ax\| \cdot \|Bx\|,$$

где $[A,B] = AB - BA$ — коммутатор операторов A и B.

Отметим на будущее, что в квантовой механике вводят обозначение $\langle A\rangle_x = (Ax,x)$, переписывают предыдущее неравенство в виде

$$\langle A^2\rangle_x \langle B^2\rangle_x \geqslant \frac{1}{4}\langle [A,B]\rangle_x^2$$

и интерпретируют его как принцип неопределённости Гейзенберга. Докажите последнее неравенство. (Для полноты отметим, что наиболее интересные с точки зрения квантовой механики операторы не являются ограниченными, так что пока вы доказали лишь частный случай принципа неопределённости Гейзенберга.)

Интегральные уравнения

24. Составьте интегральное уравнение, отвечающее задаче Коши

$$x'''(t) + tx(t) = e^t,$$
$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 1, \quad x''(0) = 0.$$

25. Решите интегральное уравнение

$$x(t) = 5\sin t + 3 - 4\int_0^t (t-s)x(s)\,ds,$$

сведя его к обыкновенному дифференциальному уравнению.
26. Найдите все решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром

$$x(t) - \int_{-1}^{1} (ts + \mu)x(s)\,ds = \cos 2\pi t.$$

Рассмотрите все возможные значения параметра μ.

27. Пусть $Ax(t) = \int\limits_0^1 K(t,s)x(s)\,ds$, где

$$K(t,s) = \begin{cases} (t+1)s, & \text{если } \ 0 \leqslant t \leqslant s; \\ (s+1)t, & \text{если } \ s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Найдите характеристические значения и собственные функции интегрального уравнения $x(t) - \mu Ax(t) = 0$, сведя его к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения.

Программу и задания
по основам функционального анализа
составил д.ф.-м.н., профессор В. А. Александров

Правила аттестации студентов по «Основам функционального анализа»

§1. Контроль работы в семестре

(1) В течение семестра студенту настоятельно рекомендуется сдать своему семинаристу в устной форме все 27 задач из приведённых выше заданий.

(2) За каждую задачу, полностью сданную в срок, студент получает 6 баллов. За задачу, сданную (полностью или частично) после установленного срока, студент получает ноль баллов.

(3) В конце семестра семинарист оценивает работу каждого студента из своей группы и добаляет ему от 0 до 50 баллов в зависимости от того, насколько активно студент решал задачи у доски, делал домашние задания, решал контрольные работы и т. п.

(4) Сумма баллов, начисленных студенту в соответствии с пунктами (2) и (3) называется «баллами за работу в семестре». Она сообщается всем студентам до проведения консультации через сайт кафедры `http://www.phys.nsu.ru/ok03/exam.html` и / или `http://www.phys.nsu.ru/aleksandrov/teaching.html` учитывается при выставлении оценки за экзамен.

(5) Приём задач из задания семинаристами заканчивается с окончанием зачётной сессии, т. е. ориентировочно 31-го мая 2019 года.

§2. Проведение экзамена

(6) Поскольку по «Основам функционального анализа» не предусмотрен зачёт, то к сдаче экзамена допускаются все студенты (даже те, кто не сдал всех задач из приведённых выше заданий).

(7) Студент может сдавать экзамен только в тот день и только в той аудитории, которые указаны в расписании экзаменов для его группы.

(8) Экзаменационный билет содержат три вопроса. Первый вопрос одинаков во всех билетах и выглядит так: «Сдача задач из заданий». Два других вопроса являются теоретическими вопросами из программы курса. Список вопросов, выносимых на экзамен, выкладывается на сайт кафедры
`http://www.phys.nsu.ru/ok03/exam.html` и / или
`http://www.phys.nsu.ru/aleksandrov/teaching.html`
до проведения консультации. Билет не содержит задач.

(9) Если студент уже сдал все задачи из заданий (что очень рекомендуется), то вытянув билет, он пропускает первый вопрос «Сдача задач из заданий» и получает один час на подготовку к двум оставшимся вопросам билета.

(10) При подготовке к ответу на второй и третий вопросы билета можно пользоваться только собственной головой. Другими словами, при подготовке к ответу на второй и третий вопросы билета запрещается пользоваться какой-либо литературой, конспектами, шпаргалками, мобильными телефонами и подсказками товарищей. Нарушающие это правило будут удалены с экзамена.

(11) Выходить из аудитории до начала ответа на второй и третий вопросы билета нельзя.

(12) Если студент не сдал какие-то из 27 задач из приведённых выше заданий (никому из студентов очень не рекомендуется попадать в эту ситуацию), то, вытянув экзаменационный билет, он должен без подготовки начать отвечать на первый вопрос билета «Сдача задач из заданий». Отвечать он должен не своему семинаристу, а любому другому свободному экзаменатору (который, при удачном ответе на первый вопрос, будет дальше спрашивать второй и третий вопросы билета).

(13) Ответ на первый вопрос не может длиться более 30 минут. При этом студент может (и даже должен) пользоваться своей тетрадью, в которой он решил те из 27 задач из приведённых выше заданий, решения которых он не сумел объяснить своему семинаристу во время семестра. Если за это время студент объяснил экзаменатору решения всех своих долгов по заданиям, то он получает один час на подготовку к двум оставшимся вопросам билета и руководствуется при этом пунктами (10) и (11) настоящих Правил. Если за это время студент не сумел объяснить экзаменатору решения всех своих долгов по заданиям, то экзамен прекращается, студент отправляется на пересдачу, а в экзаменационную ведомость выставляется оценка «неудовлетворительно».

(14) Ответ на второй и третий вопросы билета оценивается по пятибальной системе: «пятёрка» ставится за полный и правильный ответ как на вопрос билета, так и на сопутствующие вопросы преподавателя; «четвёрка» ставится за правильные формулировки всех определений и теорем, и объяснение основных идей доказательства (при этом допускается, что доказательсто не доведено до конца); «тройка» ставится за правильные формулировки всех определений и теорем из билета (при этом допускается, что о доказательстве не сказано ничего); «двойка» ставится за незнание хоть одной из теорем или хоть одного из важных (т. е. многократно используемых в курсе) определений.

(16) Если хотя бы за один из вопросов билета получена оценка «двойка», то экзамен прекращается, а студент идёт на пересдачу. Остальные оценки, полученные за ответ на второй и третий вопросы билета, конвертируются в баллы следующим образом: «пятёрка» — 200 баллов; «четвёрка» — 100 баллов, «тройка» — 0 баллов.

(17) Ответив на вопросы билета, студент должен побеседовать с преподавателем на одну из тем, не вошедших в билет. Имеется ввиду выяснить насколько свободно студент владеет изученным материалом. Речь идёт только о формулировках теорем и определениях. В этот момент доказательства теорем уже не спрашивают. По результатам этой беседы никаких оценок не ставится и баллы не начисляются. Но для тех студентов, кто не может поддерживать разговор в таком формате экзамен прекращается, а в ведомость ставится оценка «неудовлетворительно».

(18) В случае необходимости преподаватель может заменить дополнительный вопрос задачей. Например, вместо того, чтобы спросить «что называется спектром оператора» он может попросить найти спектр тождественного оператора. На экзамене не бывает задач, требующих сложных вычислений или нестандартных подходов к решению.

(19) После того, как студент ответил (не на «двойку») на все вопросы билета и побеседовал с преподавателем на тему, не входящую в билет, все заработанные им баллы суммируются (т.е. складываются баллы за ответы на второй и третий вопросы с баллами за работу в семестре). В ведомость (и зачётку) выставляется общая оценка за осенний семестр по курсу «Основы функионального анализа», определяемая следующим образом: «отлично» — если сумма баллов более 500; «хорошо» — если сумма баллов от 300 до 500; «удовлетворительно» — если сумма баллов от 100 до 300; «неудовлетворительно» — если сумма баллов менее 100.

§3. Проведение пересдачи

(20) Пересдача проводится по тем же правилам и тем же билетам, что и основной экзамен.

(21) На пересдаче долг по задачам из заданий состоит из задач, не сданных в течение семестра и на основном экзамене.

§4. Особые ситуации

(22) При необходимости и наличии уважительной причины семинарист может продлить срок приёма заданий как всей группе (например, если из-за праздников пропало занятие и студенты ещё не решали в классе задачи, аналогичные задачам из задания), так и отдельному студенту (например, в случае его продолжительной

болезни или командировки для участия в студенческой олимпиаде). В любом случае продление срока должно быть согласовано с лектором.

(23) Конфликтные и спорные ситуации урегулирует лектор. Это касается как работы в семестре, так и сдачи экзамена и пересдачи.

Правила аттестации студентов
по «Основам функционального анализа»
составил д.ф.-м.н., профессор В. А. Александров.
Они утверждены на заседании кафедры 07.06.2018.