Осенний семестр 2017г. [illegible]
Основы функционального анализа.
Лектор — В. А. Александров
Конспект вел — В. М. Роговенко (гр. 18312)

Лекция 1 (2.09)

§1. Ряды Фурье

1.1 Задача о разложении 2π-периодической ф-ии в ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \text{ - тригоном. ряд.}$$

Задача: Какие ф-ии $f: R \to R$ можно разложить в тригоном. ряд? И как найти коэф. этого ряда?

Допустим, что
$$(1)\ f(x) = \underbrace{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)}_{2\pi \text{ период.}}$$

1) $f(x)$ - 2π-период.

2) Если две 2π-период. ф-ии совпадают на любом одном интервале длины 2π, то они совпадают всюду

Допустим, что (1) можно интегрировать почленно:
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \pi a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx\right) =$$
$$= \pi a_0 + \frac{\overset{\shortparallel\ 0}{\sin \pi x}}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\cos x}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}\overset{(-1)^n - (-1)^n = 0}{} = \pi a_0$$

$$(2)\ a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

Чтобы найти a_m при $m \geqslant 1$, умножим (1) на $\cos mx$:
$$f(x)\cos mx = \frac{a_0}{2}\cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \underset{\shortparallel}{\cos nx \cos mx} + b_n \sin nx \cos mx)$$

Из школы $\to \frac{1}{2}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)$

$\frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x)$

Интегрируем...

Получится

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\, dx = a_m \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2}$$

$$(3)\quad a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\, dx$$

Аналогично находим

$$(4)\quad b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\, dx$$

Итак: коэф. триг. ряда, в который разлагается ф-ия f, находятся по формулам 2-4. Эти формулы наз-ся Эйлера-Фурье.

Коэф. a_m b_m, построенные по 2-4, наз-ся коэф. Фурье.

По коэф. Фурье a_n b_n можно построить формальный ряд Фурье ф-ии f: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum$.

1.2 Разложение в ряд Фурье с произвольным периодом

Пусть $f: R \to R$ яв. $2l$-периодической, т. е. $f(x+2l) = f(x)\ \forall x \in R$

Замена: $y = \frac{\pi}{l} x$

Тогда ф-ия $g(y) = f(x) = f(\frac{l}{\pi} y)$ яв. 2π периодич.

Значит, для g можно написать ряд Фурье

$$g(y) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos ny + b_n \sin ny), \text{ где}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\cos ny\, dy, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\sin ny\, dy, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Перейдём обратно к x:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right),$$ где

$$a_n = \frac{1\cancel{\pi}}{\cancel{\pi} l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx$$

ф-ла Эйлера - Фурье для $2l$-периодич. ф-ций

аналогично

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx$$

(1.3) Разложение ф-ии в ряд только по синусам или косинусам.

! Напоминание из матана.

Если ф-ия $f:(-a,a) \to \mathbb{R}$ и явл. нечётной, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Аналогично: Если $f:(-a, a) \to \mathbb{R}$ явл. чётной, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

Пусть задана чётная ф-ия $f:(-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$

Найдём её ряд Фурье

$$(3)\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\sin nx}_{\text{нечёт}}\,dx = 0$$

$$(2)\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\cdot\cos nx}_{\text{чёт}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\,dx$$

$$(1)\ f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

Аналогично: Если $f:(-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ - нечётная, то

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad (4)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (6)$$

$$a_n = 0 \quad (5)$$

Как выглядит ряд Фурье ф-ии, заданной на $(0, \pi)$?

Продолжим ф-ию произвольно в $(-\pi, \pi)$, а затем разложим в ряд Фурье. Есть два продолжения, которые приводят к особенно красивым ответам:
- чётным образом (1-3)
- нечётным образом (4-6)

1.4 Лемма Римана - Лебега

<u>Лемма</u> (Римана - Лебега) для конечного промежутка

Пусть $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ - абсол. интегрируема, т.е. $\int_a^b |f(x)| dx < \infty$. Тогда $\int_a^b f(x) \cos px \, dx \underset{p \to \infty}{\to} 0$

Замечания: (1) Интеграл $\int_a^b f(x) \cos px \, dx$ сущ. $\forall p$ т.к. эта ф-ия абс. инт.:

$$\int_a^b |f(x) \cos px| dx \leq \int_a^b |f(x)| dx < \infty$$

сходится

(2) Для абсолютно интегр. ф-ий сущ. формальный ряд Фурье, т.е. существ. коэф. a_n b_n

(3) В условиях леммы стремятся к нулю также и след. интегралы: $\int_a^b f(x) \cos px \, dx \underset{p \to -\infty}{\to} 0$

$$\int_a^b f(x)\sin px\,dx \underset{p\to\pm\infty}{\to} 0$$

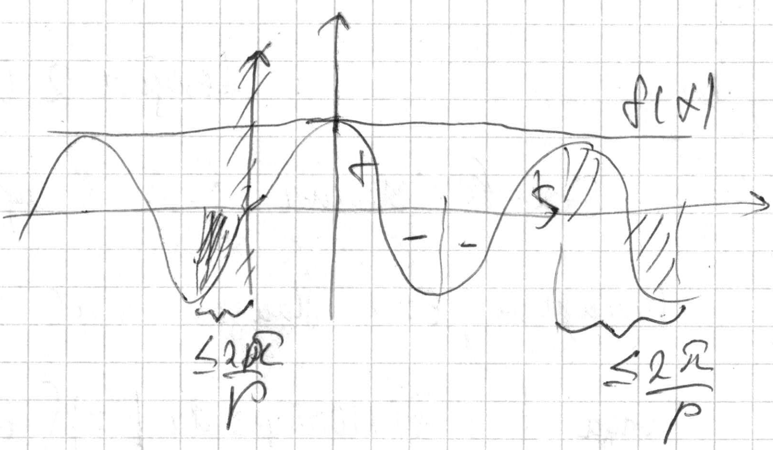
$$\int_a^b f(x)e^{\pm ipx}\,dx \underset{p\to\pm\infty}{\to} 0 \qquad e^{ix} = i\sin x + \cos x$$

(4) Почему два имени у этой леммы

Док-во: 3 штуки

I

$f \equiv const$



Площадь закр. кусочков $\le 2\cdot\frac{2\pi}{p}\cdot const \underset{p\to\pm\infty}{\to} 0$

II

Пусть f непрерывно дифф

$$\left|\int_a^b f(x)\cos px\,dx\right| \overset{\text{по частям}}{=} \left|\frac{1}{p}\int_a^b f(x)\,d(\sin px)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{p} f(x)\cdot\sin px\Big|_a^b - \frac{1}{p}\int_a^b f'(x)\sin px\,dx\right| \le$$

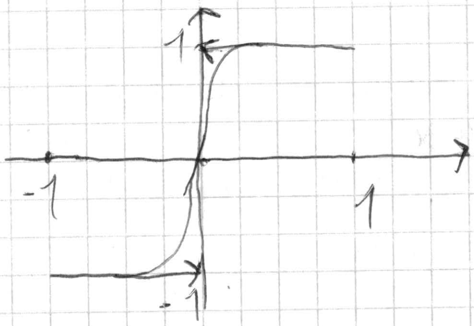
$$\le \frac{1}{p}\Big(|f(b)|\underbrace{|\sin pb|}_{\le 1} + |f(a)|\cdot\underbrace{|\sin pa|}_{\le 1} + \int_a^b |f'(x)\sin px\,dx|\Big) \le$$

$$\le \frac{1}{p}\Big(|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(x)|\,dx\Big) = \frac{const}{p} \underset{p\to\pm\infty}{\to} 0$$

III - общий случай

Будем использовать без док-ва также утв.:

Если $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ - абс. интегр., то $\forall\, \varepsilon>0$ $\exists$ непр. дифф. ф-ия $f_\varepsilon:[a,b]\to\mathbb{R}$: $\int\limits_a^b |f(x)-f_\varepsilon(x)|\,dx<\varepsilon$



$$f_\varepsilon(x)=\operatorname{arctg}\frac{x}{\varepsilon},\ \varepsilon>0$$

Лекция 2 (9.09)

Док-во леммы Р-Л в случае III:

Фиксируем $\varepsilon>0$. Найдём $g\in C^1$: $\int\limits_a^b|f(x)-f_\varepsilon(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{2}$.

Тогда
$$\Big|\int_a^b \underset{\pm f_\varepsilon(x)}{f(x)}\cos px\,dx\Big| = \Big|\int_a^b (f(x)-f_\varepsilon(x))\cos px\,dx + \int_a^b f_\varepsilon(x)\cos px\,dx\Big| = \left(\begin{matrix}\text{модуль суммы} \le \text{сумма модулей}\\ \text{модуль интеграла} \le \text{интеграл модуля}\end{matrix}\right) \le$$
$$\le \int_a^b |f(x)-f_\varepsilon(x)|\,\underbrace{|\cos px|}_{\le 1}\,dx + \Big|\int_a^b f_\varepsilon(x)\cos px\,dx\Big| \le$$
$$\le \frac{\varepsilon}{2}+\underbrace{\frac{\varepsilon}{2}}_{\text{из пункта 2}}=\varepsilon$$

1.5 Ядро Дирихле

Напоминание: Дана 2π-период. ф-ия $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. По ней строим коэф. Фурье
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

Наш новый вопрос: $f(x) \overset{?}{=} \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

Обозначим $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{m=1}^{n} a_m \cos mx + b_m \cdot \sin mx \; =$

Наш н. вопрос можно переформулировать так:

Верно ли, что $S_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{?} f(x)$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot dt + \sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot \cos tm\, dt \cdot \cos mx + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot \sin mt\, dt \cdot \sin m\cancel{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n} \underbrace{(\cos mt \cos mx + \sin mt \sin mx)}_{\cos m(t-x)}\right] dt =$$

$$= \left\langle [*] = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n} \cos m\alpha,\ \alpha = t - x \right\rangle =$$

$$\begin{cases} \sin\alpha - \sin\beta = 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \sin\frac{3\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} = 2\cos\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{5\alpha}{2} - \sin\frac{3}{2}\alpha = 2\cdot\cos 2\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2} \ \dots \\ \sin\frac{2n+1}{2}\alpha - \sin\frac{2n-1}{2}\alpha = 2\cdot\cos n\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2} \end{cases} +$$

$$\sin\frac{2n+1}{2}\alpha = 2\cdot[*]\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$[*] = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

~~Опр. $D_n(x) = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}(t-x)}{2\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}$ – фрак~~

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(t-x)}{\sin\frac{t-x}{2}}\,dt = \langle t - x = z\rangle =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} \underbrace{f(x+z)}_{2\pi\text{-период}}\, \frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{\underbrace{\sin\frac{z}{2}}_{2\pi\text{-период}}}\, dz =$$

Задача: Если $f: R \to R$ — 2π-период. ф-ия, то $\forall a \in R$ справедливо равенство: $\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$

$$\textcircled{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{\sin\frac{z}{2}}dz = \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)D_n(z)dz}_{\text{Интеграл Дирихле}}, \text{ где}$$

$$D_n = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{\sin\frac{z}{2}}$$ — ядро Дирихле

Св-ва ядра Дирихле:

1) $D_n(z)$ - четная ф-ия

2) $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(z)dz = 1$, т.к. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2}+\cos z+\dots+\cos nz\right]dz = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

(1.6) Теорема о представимости ф-ии в точке её рядом Фурье.

<u>Опр.</u> 2π-период. ф-ия $f: R\to R$ наз-ся кусочно-гладкой, если $\exists$ конечное число точек $-\pi = x_1 < x_2 < \dots < x_n = \pi$ таких, что:

1) $\forall j = 1,\dots,n-1$ ф-ия f непр. дифф. в открытом интервале (x_j, x_{j+1})

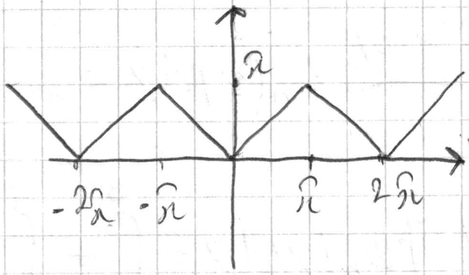
2) $\forall j = 1,\dots n$ сущ. и конечны пределы $\lim\limits_{h\to 0+} f(x_j \pm h) = f(x_j \pm 0)$

3) $\forall j = 1,\dots, n$ сущ. и конечны пределы

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(x_j \pm h) - f(x_j \pm 0)}{h}$$

Примеры кусочно-гладких ф-ий

1) $f(x) = |x|$, если $|x| < \pi$ и f - 2π-период.



$-\pi = x_1;\ x_2 = 0;\ x_3 = \pi$

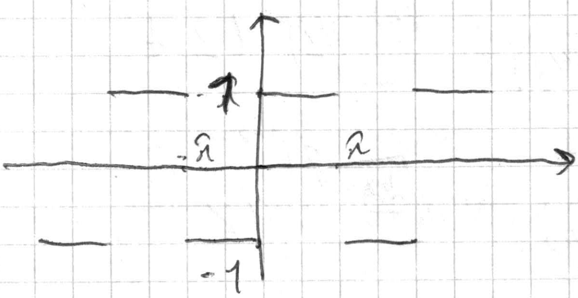
$f(x_1 \pm 0) = \pi$

$f(x_2 \pm 0) = 0$

$f(x_3 \pm 0) = \pi$

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(x_2 + h) - f(x_2 + 0)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{0 + h - 0}{h} = 1$$

2) $\operatorname{sgn} x$, $|x| < \pi$, и f - 2π-период



$x_1 = -\pi,\ x_2 = 0,\ x_3 = \pi$

$f(x_1 + 0) = 1,\ f(x_1 - 0) = +1$ ..

Теорема (о представимости ф-ии в точке её рядом Фурье)

Пусть $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - кус.-гл. ф-ия. Тогда $\forall x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) =$

$$= \begin{cases} f(x), & \text{если } x \text{ - точка сгущения} \\ \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)], & \text{если } x \text{ - разрыв} \end{cases}$$

Док-во:

Обозначим $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} (a_m \cos mx + b_m \sin mx) =$

$= \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) D_n(z)\, dz$. Нам нужно доказать, что

$S_n(x) - f(x) \xrightarrow[n \to 0]{} 0$ или $S_n(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) D_n(z)\,dz - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} D_n(z)\,dz =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x+z) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \right] D_n(z)\,dz = \underbrace{\int_{-\pi}^{0}}_{\text{замена } z=-z} + \int_{0}^{\pi} =$$

$$= + \int_{0}^{\pi} \left[f(x-z) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \right] \cdot \underbrace{D_n(z)}_{\text{чётная}}\,dz + \ldots f(x+z) =$$

остальные сокращения

$$= \int_{0}^{\pi} (f(x+z) - f(x+0)) D_n(z)\,dz + \int_{0}^{\pi} (f(x-z) - f(x-0)) D_n(z)\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{f(x-z)-f(x-0)}{z/2} \cdot \frac{z/2}{\sin z/2} \cdot \sin\Big(\overbrace{\boxed{\tfrac{2n+1}{2}}}^{=p\to\infty} z\Big)\,dz +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{f(x+z)-f(x-0)}{z/2} \cdot \frac{z/2}{\sin z/2} \cdot \sin\Big(\overbrace{\boxed{\tfrac{2n+1}{2}}}^{=p\to\infty} z\Big)\,dz$$

Если абс. инт., то оба интеграла стремятся к нулю при $n \to \infty$ по лемме Р.-Л.

Ф-ции абс. инт., т.к. $\frac{z/2}{\sin z/2} \xrightarrow[z\to 0]{} 1$ и $\frac{f(x-z)-f(x-0)}{z/2}$ имеет конечный предел при $z \to 0$ по св. 3 кус. гл. ф-ций ■

1.7 Пример разложения ф-ции в ряд Фурье и суммирование числового ряда.

Пусть f - 2π-период., и задана формулой

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & 0 < x < \pi \\ 0, & x = 0, \pi \\ -\frac{\pi}{4}, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

$a_n = 0$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot \sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot \sin nx\,dx =$$

$$\cancel{= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot 2 = 1} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^n - 1}{n}$$

Значит $f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$

Т. к. f - кус. гл. ф-ия, то справедливо равенство
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$$

Подставим сюда $x = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$ - Ряд Лейбница

1.8 Ряды Фурье в комплексной форме Лекция 3

Пусть $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - 2π-периодическая и $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos x + b_n \sin nx) \ominus$

Напомним: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}$

$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$

$\Downarrow$

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

$$\ominus \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}\right) + b_n\left(\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n - ib_n}{2}e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n + ib_n}{2}e^{-inx} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ikx}, \text{ где } C_k = \begin{cases} \frac{a_k - ib_k}{2}, & k > 0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\underbrace{(\cos kx - i\sin kx)}_{e^{-ikx}}dx \\ \frac{a_0}{2}, & k = 0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\underbrace{}_{e^{i0x}}dx \\ \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2}, & k < 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\underbrace{(\cos(-k)x + i\sin(-k)x)}_{e^{-ikx}}dx =$$

*

Значит $f(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{+ikx}$, $c_k = \frac{1}{2\pi} \cdot \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-ikx} dx$

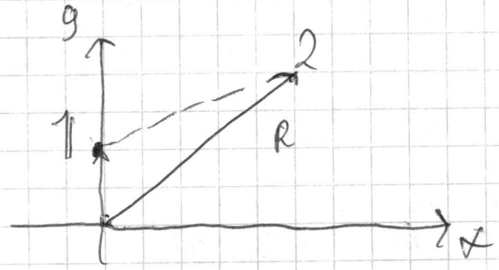
Ряд Фурье в комплексной форме

коэф. Фурье в комп. форме

(1.9) Разложение в комплексный и вещественный ряд Фурье без вычисления интегралов.

Пусть $f(x) = \frac{1-a^2}{1-2a\cos x + a^2}$, $|a|<1$

Откуда такой знаменатель?



квадрат между 1 и 2 =

$= 1^2 + R^2 - 2 \cdot 1 \cdot R\cos\varphi =$

$R>1$, пусть $\frac{1}{R} = a < 1$, тогда

$= R^2(1 - 2a\cos\varphi + a^2)$

Напомним (сумма беск. геом. пр.):

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$, $q<1$, $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $e^{ix} = z$, то

$\cos x = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) = \frac{z^2+1}{2z}$

Тогда $f(x) = \frac{1-a^2}{1 - a\frac{z^2+1}{z} + a^2} = \frac{(1-a^2)z}{z - az^2 - a^2 z - a} \; \left(\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)\right) =$

$= \frac{az - \frac{z}{a}}{z^2 - (a+\frac{1}{a})z + 1} = \frac{(a-\frac{1}{a})z}{(z-a)(z-\frac{1}{a})} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-\frac{1}{a}} =$

$= \frac{A(z-\frac{1}{a}) + B(z-a)}{(z-a)(z-\frac{1}{a})} =$ $\left.\begin{matrix} z \\ 1 \end{matrix}\right|$ $A + B = a - \frac{1}{a} \to -Ba^2 + B = a - \frac{1}{a} \to$

$-\frac{A}{a} - Ba = 0 \to A = -Ba^2$

$\to B(1-a^2) = \frac{1}{a}(a^2-1) \to B = -\frac{1}{a}$, $A = a$

$= \underset{S_1}{\frac{a}{z-a}} - \underset{S_2}{\frac{1/a}{z-1/a}} \; \boxed{=}$

$$S_1 = \frac{a/z}{1-a/z} \underset{|q|=|a/z|=|a|<1}{=} \frac{q}{1-q} = \frac{a}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{z^n} \underset{k=n+1}{=} \sum_{k=1}^{\infty} a^k \cdot e^{-ikx}$$

$$S_2 = \frac{1}{1-az} \underset{|q|=|az|=|a|<1}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{inx}$$

Ряд Фурье в комплексном виде

$$\boxed{\Rightarrow} \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{inx} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|} e^{inx} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (e^{inx} + e^{-inx}) = 1 + 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx$$ – веществ. ряд Фурье

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\,dx$$

$$2a^n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-a^2}{1-2a\cos x + a^2}\cdot\cos nx\,dx \quad \forall n \text{ и } \forall |a|<1$$

1.10 Теоремы о дифф и интегрировании рядов Фурье.

Пусть $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – 2π-периодическая гладкая ф-ия (гладкая = непр. дифф.).

Тогда $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$, $f'(x)$ – тоже 2π-периодич.

$$f'(x) \sim \frac{a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n'\cos nx + b_n'\sin nx)$$

Теорема (О почленном дифф. ряда Фурье)

Справедливы равенства:

$a_0' = 0$, $a_n' = n\cdot b_n$; $b_n' = -n a_n$, $n \geq 1$

Док-во:

$$a_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\Big[\underbrace{f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{0} + n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\Big] =$$

$= n\cdot b_n$ Остальные равенства доказываются аналогично.

Замечание (О названии теоремы):

$$f'(x) = \frac{a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n'\cos nx + b_n'\sin nx) -$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\Big(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{-na_n}_{b_n'}\sin nx + \underbrace{nb_n}_{a_n'}\cos nx$$

Пусть $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – 2π-период, непрерывна и $\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx = 0$. Тогда $g(x) \sim \frac{a_0 \to 0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$. Построим $G(x) = \int_0^x g(t)dt$

(всему интегралу $=0$)

– 2π-периодич. и гладкая, тогда

$$G(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

Теорема (о почленном интегр. ряда Фурье)

Справедливы формулы:

$$\frac{A_0}{2} = +\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n} \quad (1)$$

$$A_n = -\frac{b_n}{n} \quad (2)$$

$$B_n = \frac{a_n}{n} \quad (3)$$

Док-во:

т.к. $G'(x) = g(x)$, то ф-лы 2 и 3 справедливы по предыдущей теореме

Докажем ф-лу (1):

$G(0) = 0$

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \overset{(2)}{=} \frac{A_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} b_n/n.$$

Замечание (о названии теоремы)

$$G(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

$$\int_0^x g(t)dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sin nt}{n}\Big|_0^x +$$

$$+ b_n \frac{-\cos nt}{n}\Big|_0^x = +\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}b_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sin nx}{n} - \frac{b_n}{n}\cos nx.$$

(1.11) Задача о наилучшем приближении тригоном. многочленами и нер-во Бесселя. ~~см. 1.16~~

<u>Опр.</u> Пусть α_k, β_k — это произв. вещ. числа $k=0,1..n$. Тогда

$T_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \cos kx+\beta_k \sin kx)$ - наз-ся тригоном. мн-ном степени n.

<u>Задача</u> о наил. прибл.: Дано:

ф-ция $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ и $n\in\mathbb{N}$. Нужно найти T_n^* степени n, который наилучшим образом приближает ф-цию.

Что значит наилучшим образом?

Возможные ответы:

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]}|f(x)-T_n(x)|\to\min$$ - приближение в равномерной форме

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-T_n(x)|\,dx\to\min$$ - приближение в среднем

$$\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-T_n(x)|^2\,dx}\to\min$$ - в среднеквадратичном

Мы будем решать эту задачу минимизируя

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-T_n(x))^2\,dx$$

Ответ дается следующей теоремой:

Теорема (о наил. приближении тригоном. мн-нами) (см. 1.16)!

Пусть $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ и $n\in\mathbb{N}$. Тогда интеграл

$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-T_n(x))^2\,dx$ достигает минимального значения среди всех тригоном. мн-нов степени n если и только если T_n совпадает с начальным отрезком ряда Фурье ф-ции f, т.е. если $\alpha_n=a_n$ и $\beta_n=b_n$ $\forall n$

23.09.19 Лекция 4.

Док-во:

$$(f(x)-T_n(x))^2 = \left(f(x) - \frac{\alpha_0}{2} - \sum_{m=1}^{n} (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx)\right)^2 = f^2(x) + \frac{\alpha_0^2}{4} + \sum_{m=1}^{n} (\alpha_m^2 \cos^2 mx + \beta_m^2 \sin^2 mx) - \alpha_0 f(x) - 2\sum_{m=1}^{n} (\alpha_m f(x) \cos mx + f(x)\beta_m \sin mx) + \sigma_n(x)$$

$\sigma_n(x)$ — линейная комб. слагаемых вида $\cos mx$, $\sin mx$, $\cos mx \cdot \cos kx$, $m \neq k$, $\cos mx \cdot \sin kx$ (m может равняться k), $\sin mx \cdot \sin kx$, $m \neq k$

Из (1.1): интеграл от каждого слагаемого в $\sigma_n(x)$ от $-\pi$ до π, равны нулю. Кроме того, в (1.1) мы вычислили

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \, dx = \pi \quad \forall m \geq 1$$

Проинтегрируем равенство по $[-\pi, \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \pi \frac{\alpha_0^2}{2} + \pi \cdot \sum_{m=1}^{n} (\alpha_m^2 + \beta_m^2) - \cancel{2}\alpha_0 \cdot a_0 \cdot \pi - 2\pi \sum_{m=1}^{n} (\alpha_m \cdot a_m + \beta_m \cdot b_m) + 0 =$$

выделим полный квадрат

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \frac{\pi}{2}(\alpha_0 - a_0)^2 - \frac{\pi}{2} a_0^2 + \pi \sum_{m=1}^{n} \left((\alpha_m - a_m)^2 + (\beta_m - b_m)^2\right) - \pi \sum_{m=1}^{n} (a_m^2 + b_m^2)$$

— не зависят от α_m и b_m

Оставшиеся слагаемые неотрицательные и зануляются только если $\alpha_m = a_m$ и $\beta_m = b_m$ $\forall m = 0, 1, \dots n$. ■

Теорема (Нер.-во Бесселя) (См. 1.16) !

Пусть $f: R \to R$ - 2π-периодич., $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < \infty$. Тогда ряд $\frac{a_0^2}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ сходится и $\frac{a_0^2}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq$

$\leq \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$

Док-во:

Знаем из пред. док-ва, что $\forall n$ $\int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_n(x))^2 dx =$

$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \pi \sum\limits_{m=1}^{n} [(\alpha_m - a_m)^2 + (\beta_m - b_m)^2] - \pi \sum\limits_{m=1}^{n} (a_m^2 + b_m^2) +$

$+ \frac{\pi}{2} (\alpha_0 - a_0)^2 - \frac{\pi}{2} \cdot a_0^2$

Подставим сюда $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{начальный} \\ \text{отрезок ряда Фурье}}}{S_n(x)}$ вместо $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{произвольный} \\ \text{многочлен}}}{T_n(x)}$, получим:

$0 \leq \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\underbrace{f(x) - S_n(x)}_{\geq 0})^2 dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \sum\limits_{m=1}^{n} (a_m^2 + b_m^2) -$

$- \frac{\pi}{2} a_0^2$

Значит, $\underbrace{\frac{a_0^2}{2} + \sum\limits_{m=1}^{n} (a_m^2 + b_m^2)}_{\text{частичная сумма ряда}} \overset{(**)}{\leq} \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx < +\infty$

$(*)$ $\frac{a_0^2}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$, все члены которого неотриц,

т.е. его частичные суммы монотонно возрастают.

Из матана: монотонная огр. посл. имеет конечный предел, значит $(*)$ - сходится. Значит, в нер-ве $(**)$ можно перейти к пределу. Получим $\frac{a_0^2}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$. ■

1.12 Равномерная сходимость ряда Фурье.

Теорема. Пусть $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – 2π-периодическая, гладкая ф-ия. Тогда её ряд Фурье сходится к f равномерно на $\mathbb{R}$.

Напоминание из матана: говорят, что функц. ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится к ф-ии $u(x)$ на $[a,b]$, если

$$\sup_{x \in [a,b]} \left| u(x) - \sum_{m=0}^{n} u_m(x) \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Теорема (Вейерштрасса о мажорируемой сходимости)

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сх-ся к $u(x)$ при любом $x \in [a,b]$.

И пусть $\forall n \ \exists C_n \in \mathbb{R}: |u_n(x)| \le C_n \ \forall x [a,b]$, причём

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится к $u(x)$ равномерно на $[a,b]$

Док-во:

То, что р. Ф. сходится поточечно мы уже знаем из т. о представимости ф-ии в точке её р. Ф.

Положим $u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$. Тогда р. Ф. $= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

$$a_n' = n b_n \qquad b_n' = -n a_n$$

$$|u_n(x)| = |a_n \cos nx + b_n \sin nx| \le |a_n| + |b_n| = \left|\frac{b_n'}{n}\right| + \left|\frac{a_n'}{n}\right| \underset{uv \le \frac{u^2+v^2}{2}}{\le} \frac{1}{2}\left((b_n')^2 + \frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{2}\left((a_n')^2 + \frac{1}{n^2}\right) \underset{\text{обозначим так}}{=} C_n$$

~~нер-во Бесселя для~~ ф-ии ~~производной f'~~

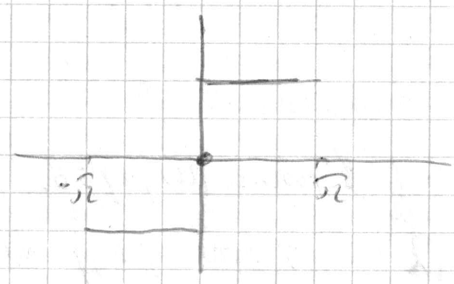
$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} ((a_n')^2 + (b_n')^2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \underset{\text{нер-во Бесселя для } f'}{\le} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'^2(x)\,dx + \frac{\pi^2}{6} < +\infty.$$

Значит, по т. Вейер. о мажор. сход.

ряд Фурье сходится равномерно.

1.13 Явление Гиббса

Рассмотрим $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - 2π-периодич. и на $[-\pi, \pi]$ задана формулой: $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi \\ 0, & x = 0, \pi \\ -1, & -\pi < x < 0 \end{cases}$

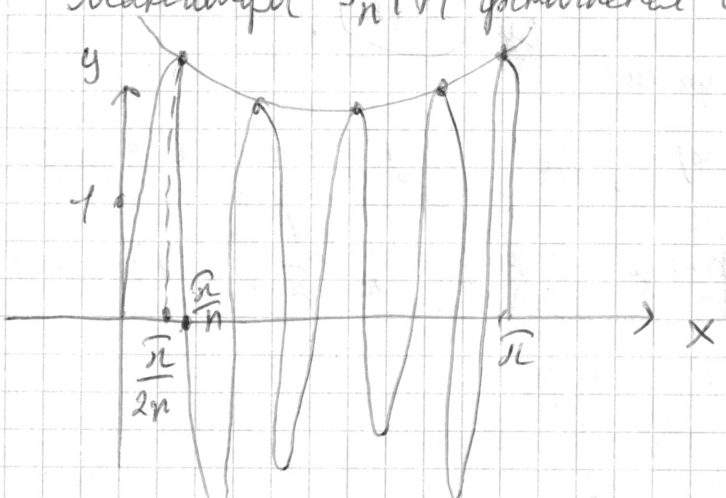


Мы знаем $f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$

Этот ряд не может сходиться равномерно

Пусть $S_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{n} \frac{\sin(2m+1)x}{2m+1}$

Максимум $S_n(x)$ достигается в точке $x = \frac{\pi}{2n}$



$A(S_n(x)) = \max_{x \in [0,\pi]} S_n(x) = S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) =$

$= \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{n} \frac{\sin(2m+1)\frac{\pi}{2n}}{(2m+1)\frac{\pi}{2n}} \cdot \frac{\pi}{2n}$

Это сумма Римана для интеграла

$Si(\pi) = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt$ - интегральный синус

$Si(x) = \int_0^{x} \frac{\sin t}{t}\, dt$. Про него известно, что он не выражается в элементарных ф-циях. Но она хорошо изучена. В частности, известно её значение в т. π. Тогда

$A(S_n(x)) \underset{n \to \infty}{\Rightarrow} \frac{2}{\pi} Si(\pi) = 1{,}1789\ldots$ - год начала франц. революции

Значит для ф-ции $f(x) = \operatorname{sgn} x$ мы видим, что амплитуда $S_n(x)$ превышает амплитуду $f(x)$ на $[0, \pi]$ на 18%.

Опр. Пусть f – 2π-периодич., кусочно-гладкая ф-ия и $S_n(x)$ – частичная сумма её р. Ф. Говорят, что в x_0 имеет место явление Гиббса, если $f(x_0+0) < \varlimsup\limits_{\substack{n\to\infty \\ x\to x_0+0}} S_n(x)$

$\varlimsup\limits_{\substack{n\to\infty \\ x\to x_0-0}} S_n(x) < f(x_0-0)$

Замечания:

(1) в точке непрерыв. явления Гиббса не бывает

(2) в $\forall$ точке разрыва яв. Гиббса есть, причём с теми же 18%

(3) Яв. Гиббса (так же как и р. Фурье вообще) играет большую роль в теории цифровой передачи сигналов.

(1.14) Равенство Ляпунова

см. (1.16)!

Теорема (Рав-во Ляпунова)

Пусть $f: R\to R$ – 2π-периоd. и $\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x)| < +\infty$ и пусть a_n, b_n – коэф. Фурье ф-ии f, т.е. $a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$. Тогда

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

Замечание. Рав-во Ляпунова справедливо при тех же предположениях, что и нер-во Бесселя.

Док-во: (для случая непр.-дифф. ф-ии f)

Доказывая равномерную сходимость ряда Фурье, мы вывели тождество: $\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(x)|^2dx = \cancel{\pi\frac{a_0^2}{2}+\pi}$.

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \frac{\pi a_0^2}{2} - \pi\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$), где $S_n(x)$ - частич. сумма ряда Фурье

Кроме того, мы знаем, что $S_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ для непр. дифф. f.

Перейдём к пределу в тождестве при $n\to\infty$.

$$0=\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \pi\frac{a_0^2}{2} - \pi\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) \blacksquare$$

В общем случае надо приближать интегр. ф-ию непр.-дифф. и использовать уже доказанное равенство.

Теорема (обобщённое рав-во Ляпунова) (см. 1.16) !

Пусть $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ - 2π-период. ф-ия и $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|dx<\infty$ и

пусть $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ - 2π-период. ф-ия такая, что $\int_{-\pi}^{\pi}g(x)dx<+\infty$

Пусть a_n, b_n - коэф. р. Ф. для f, а α_n, β_n - для g. Тогда интеграл $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot g(x)dx$ - сходится и

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx=\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n).$$

Док-во:

Элементарное нер-во: $\forall u,v\in\mathbb{R}$ $|uv|\le\frac{1}{2}(u^2+v^2)$,

тогда $|f(x)g(x)|\le\frac{1}{2}|f(x)|^2+\frac{1}{2}|g(x)|^2 \longrightarrow$

$$\to\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx\le\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)|^2dx<\infty,$$

т.к. можно воспользоваться нер-вом Гёльдера:
Если f и $g: [a,b]\to\mathbb{R}$ и $\int_a^b|f(x)|^pdx<+\infty$ и

$\int_a^b |g(x)|^q dx < +\infty$ и $p>0, q>0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, то

$\int_a^b |f(x)\cdot g(x)|dx$ - сходится и $\int_a^b |f(x)\cdot g(x)| \leq$

$\leq \left\{\int_a^b |f(x)|^p dx\right\}^{1/p} \cdot \left\{\int_a^b |g(x)|^q dx\right\}^{1/q}$

Из нер-ва Гёльдера следует: ($p=q=2>0$, $\frac{1}{q}+\frac{1}{q}=1$)

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\cdot \underset{g(x)}{\underset{\parallel}{1}}\, dx \leq \left\{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx\right\}^{1/2} \cdot \left\{\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx\right\}^{1/2}$$

Получается, что из сходимости $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$ следует сходимость $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx$, но нужно наоборот :)

Ф-ии $f \pm g$ имеют коэф Фурье $a_n \pm \alpha_n$ и $b_n \pm \beta_n$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f \pm g)(x)\cdot \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx \pm$$

$$\pm \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cdot \cos nx\, dx = a_n \pm \alpha_n$$

Используем рав-во: $(u+v)^2-(u-v)^2 = 4uv$

Подставляем $u=f(x)$, $v=g(x)$:

$$|f(x)+g(x)|^2 - |f(x)-g(x)|^2 = 4f(x)g(x)$$

Проинтегрируем его от $-\pi$ до π:

Рав-во Ляпунова

$$4\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot g(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)+g(x)|^2 dx - \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-g(x)|^2 dx =$$

$$= \pi\frac{(a_0+\alpha_0)^2}{2} + \pi\sum_{n=1}^{\infty}\left((a_n+\alpha_n)^2+(b_n+\beta_n)^2\right) - \pi\frac{(a_0-\alpha_0)^2}{2} -$$

$$-\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left((a_n-\alpha_n)^2+(b_n-\beta_n)^2\right) = \pi 4\frac{a_0\alpha_0}{2} + 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n)$$

Теорема (рав-во Ляпунова в компл. форме)

Пусть $f: R \to C$ - 2π-периодич. ф-ия, такая что $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < +\infty$. Тогда $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx =$
$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$, где c_n - коэф. Фурье, $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-inx} dx$.

Док-во: Пусть сначала $f: R \to R$. Тогда

$$c_n = \begin{cases} \frac{a_n - ib_n}{2}, & n > 0 \\ \frac{a_0}{2}, & n = 0 \\ \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2}, & n < 0 \end{cases}$$

Тогда $|c_n|^2 = c_n \cdot \overline{c_n} = \begin{cases} \frac{a_n - ib_n}{2} \cdot \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{a_n^2 + b_n^2}{4}, & n > 0 \\ \frac{a_0^2}{4}, & n = 0 \\ \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} \cdot \frac{a_{-n} - ib_{-n}}{2} = \frac{a_{-n}^2 + b_{-n}^2}{4}, & n < 0 \end{cases}$

Значит $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{-1} |c_n|^2 + |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} |c_{-k}|^2 + |c_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2 + b_k^2}{4} + \frac{a_0^2}{4} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2 + b_k^2}{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right) \overset{\text{рав-во Ляпунова}}{=}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

Пусть теперь $f: R \to C$.

Тогда $f(x) = f'(x) + i f''(x)$, $f'(x) = \operatorname{Re} f(x)$,
$f''(x) = \operatorname{Im} f(x)$

Тогда $C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-inx}dx +$

$+ \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)e^{-inx}dx = C_k' + iC_k''$

$|f(x)|^2 = f(x)\cdot\overline{f(x)} = (f'(x)+if''(x))(f'(x)-if''(x)) =$

$= f'^2 + f''^2$. Аналогично $|C_n| = |C_n'|^2 + |C_n''|^2$.

Следовательно, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2dx + \frac{1}{2\pi}\cdot$

$\cdot\int_{-\pi}^{\pi}|f''(x)|^2dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|C_n'|^2 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|C_n''|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_n|^2$ ■

Упр. Сформулировать и доказать обобщ. рав-во Ляпунова в компл. форме.

(1.15) Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении ф-ии тригоном. и алгебр. многочленами.

Теорема (Вейерштрасса о ...) - тригоном. многочлен.
Пусть $f: [-\pi, \pi] \to R$, f - непр. и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ тригоном. мн-н $T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^{n}(\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx)$

такой, что $\forall x \in [-\pi, \pi]$ выполняется нерав-во:

$|f(x) - T_n(x)| < \varepsilon$

Идея док-ва: Продолжим ф-ию f на всю R до 2π-период ф-ии F. Т.к. f - непр. и $f(-\pi) = f(\pi)$, то F - непр.

$\forall h > 0$ построим новую ф-ию: $F_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} F(t)dt$ -

- средняя ф-ия по Стеклову. Ф-ия F_h обладает свойствами:

1) F_h - непр. дифф ($\frac{dF_h}{dx} = \frac{F(x+h) - F(x-h)}{h}$)

2) $F_n \underset{n\to 0}{\rightrightarrows} F$

$|F(x)-F_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in R$ по (2)

т.к. F_n - непр. дифф., то её р. Ф. сходится к F_n равномерно,

т.е. $|F_n(x) - \underbrace{S_n^n(x)}_{\text{частичная сумма ряда Фурье ф-ии } F_n}| < \varepsilon \quad \forall x \in R$

Взяв в качестве $T_n(x)$ многочлен $S_n^n(x)$ получим:

$$|F(x) - T_n(x)| = |F(x) \underset{\uparrow \pm F_n(x)}{-} S_n^n(x)| \le \underbrace{|F(x) - F_n(x)|}_{<\varepsilon} +$$

$$+ \underbrace{|F_n(x) - S_n^n(x)|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon \quad \blacksquare$$

Теорема (Вейерштрасса о ... алгебр. мн-нах)

Пусть $f:[a,b] \to R$ - непр. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ ал. мн-н $P_n(x) =$

$= \sum\limits_{m=0}^{n} C_m \cdot x^m$ такой, что $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon \ \forall x \in [a,b]$

Идея док-ва:

I шаг - достаточно доказать эту теорему для какого-нибудь одного промежутка $[a,b]$, например, для $[0,\pi]$. Построим новую ф-ию $g:[0,\pi] \to R$ по ф-ле $g(y) = f(\underbrace{\alpha y + \beta}_{x})$:

$x = a = \beta \ (y=0) \to \beta = a$

$x = b = \alpha\pi + \beta \ (y = \pi) \to \alpha = \dfrac{b-a}{\pi}$

Лекция 6 (07.10)

т.к. по предположению для промежутка $[0,\pi]$ теорема доказана, то $\forall \varepsilon > 0 \ \exists P_n(y)$ - ~~[illegible]~~ - алгебраический многочлен такой, что $|g(y) - P_n(y)| < \varepsilon \quad \forall y \in [0, \pi]$

Перейдём от y к x: $\quad x = \frac{b-a}{\pi} y + a \to y = \frac{(x-a)\pi}{b-a} \quad \forall x \in [a, b]$

$|f(x) - P_n(\frac{(x-a)\pi}{b-a})| < \varepsilon$ это и есть искомый многочлен.

$\underline{\text{II}}$ шаг: $[a, b] = [0, \pi]$

Продолжим ф-ию f на промежуток $[-\pi, \pi]$ чётным образом до ф-ии $\tilde{f}$. Тогда $\tilde{f}: [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ - непр. и $\tilde{f}(-\pi) = \tilde{f}(\pi)$.

Т.е. для $\tilde{f}$ выполнены усл. т. Вейер. о равномерном приближении тригоном. мн-ми, и значит $\forall \varepsilon > 0 \ \exists T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum\limits_{m=1}^{n} (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx)$ такой, что $\forall x \in [-\pi, \pi] \ |\tilde{f}(x) - T_n(x)| < \varepsilon$,

т.е. $\forall x \in [0, \pi] \ |f(x) - \frac{\alpha_0}{2} - \sum\limits_{m=1}^{n} \alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx| < \varepsilon$.

Из матана $\to$ ряды Тейлора для $\cos$ и $\sin$ сходятся равномерно на любом промежутке конечной длины $\to$

$\to \exists Q, R$ - мн-ны такие, что $\left.\begin{array}{l} |\sin x - Q(x)| < \varepsilon \\ |\cos x - R(x)| < \varepsilon \end{array}\right\} \forall x \in [0, \pi]$

Обозначим $P_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum\limits_{m=1}^{n} \alpha_m R(mx) + \beta_m \cdot Q(mx)$ - алгебр. многочлен. Оценим разность:

$$|f(x) \underset{\pm T_n(x)}{\underset{\uparrow}{-}} P_n(x)| \le \underbrace{|f(x) - T_n(x)|}_{<\varepsilon} + |T_n(x) - P_n(x)| \le \varepsilon +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n} |\alpha_m| \cdot |\cos mx - R(mx)| + |\beta_m| \cdot |\sin mx - Q(mx)| \le$$

$$\le \varepsilon + 2n\varepsilon M, \text{ где } M = \max_{m=1..n} \{|\alpha_m|, |\beta_m|\}$$

1.16 Работа над ошибками

(1) Нер-во Гельдера будет доказано в декабре

(2) Из Гельдера вывели, что если $[a, b]$ имеет конечную длину, то $\int\limits_a^b f^2(x)\,dx < +\infty \to \int\limits_a^b |f(x)|\,dx < +\infty$.

Сейчас заметим, что обратно не верно!!!

$$\int_0^a x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_0^a, & \text{если } \alpha+1 \neq 0 \\ \ln x\Big|_0^a, & \text{если } \alpha = -1 \end{cases} \rightarrow \text{этот интеграл}$$

Сходится только если $\alpha+1>0$

Значит для $f(x) = x^\alpha$

(**) $\int_0^a f^2(x)dx$ сх-ся $\leftrightarrow 2\alpha+1>0$, т.е. если $\alpha > -\frac{1}{2}$

(*) $\int_0^a |f(x)|dx$ сх-ся $\leftrightarrow \alpha+1>0$, т.е. если $\alpha > -1$

Значит, для $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$ (*) сходится, а (**) - расходится

(3) 1.11 в формулировке т-мы о наил. приближении тригоном. мн-нами нужно добавить условие $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx < +\infty$

1.11 в формулировке нер-ва Бесселя условие $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < +\infty$ нужно заменить на $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx < +\infty$

1.14 $\left.\begin{array}{l}\text{в рав-ве Ляпунова} \\ \text{в обозн. рав-ве Ляпунова}\end{array}\right\}$ - это не самое

§2 Преобразование Фурье

2.1 Интеграл Фурье как предельная форма ряда Фурье.

Здесь будут только наводящие соображения.

Пусть $f: R \to R$ и пусть $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$

Более того, предположим, что f такова, что $\forall l > 0$ сужение f на $[-l, l]$ разлагается в сходящийся ряд Фурье. $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l})$, где

$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t) \cdot \cos \frac{\pi n t}{l} dt$, $b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t) \cdot \sin \frac{\pi n t}{l} dt$.