$$\int_0^a x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_0^a, & \text{если } \alpha+1\neq 0 \\ \ln x\Big|_0^a, & \text{если } \alpha=-1 \end{cases} \to \text{Этот интеграл}$$

Сходится только если $\alpha+1>0$

Значит для $f(x)=x^\alpha$

$(**)$ $\int_0^a f^2(x)dx$ сх-ся $\leftrightarrow 2\alpha+1>0$, т.е. если $\alpha>-\frac{1}{2}$

$(*)$ $\int_0^a |f(x)|dx$ сх-ся $\leftrightarrow \alpha+1>0$, т.е. если $\alpha>-1$

Значит, для $-1<\alpha<-\frac{1}{2}$ $(*)$ сходится, а $(**)$ - расходится

(3) 1.11 в формулировке т-ма о наилучшем приближении тригонои. мн-нами нужно добавить условие $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx<+\infty$

1.11 в формулировке нер-ва Бесселя условие

$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|dx<+\infty$ нужно заменить на $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx<+\infty$

1.14 в рав-ве Ляпунова
в обобщ. рав-ве Ляпунова } - то же самое

§2 Преобразование Фурье

2.1 Интеграл Фурье как предельная форма ряда Фурье.

Здесь будут только наводящие соображения.

Пусть $f: R\to R$ и пусть $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx<+\infty$

Более того, предположим, что f такова, что $\forall l>0$ сужение f на $[-l,l]$ разлагается в сходящийся ряд Фурье. $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{\pi n x}{l}+b_n\sin\frac{\pi n x}{l})$, где

$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\frac{\pi n t}{l}dt$, $b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cdot\sin\frac{\pi n t}{l}dt$.

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\Big(\cos\frac{\pi n t}{l}\cdot\cos\frac{\pi n x}{l} +$$

$$+ \sin\frac{\pi n t}{l}\sin\frac{\pi n x}{l}\Big) f(t)\,dt \;=$$

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt \xrightarrow[l\to\infty]{} 0, \text{ т.к. } \int_{-l}^{l} f(t)\,dt < +\infty, \ \frac{1}{2l}\xrightarrow[l\to\infty]{} 0$$

$$= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi(t-x)}{l}\cdot f(t)\,dt \;=$$

$$y_n = \frac{\pi n}{l} \to y_{n+1} - y_n = \frac{\pi}{l}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos y_n(t-x) = \frac{1}{\Delta y_n}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\cos y_n(t-x)\cdot\Delta y_n}_{\text{сумма Римана для } \int_0^{\infty}\cos y(t-x)\,dy}$$

$$= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cdot\Big(\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\infty}\cos y(t-x)\,dy\Big)dt \xrightarrow[l\to+\infty]{}$$

$$\to \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\int_0^{\infty}\cos yt\cdot\cos yx + \sin yt\cdot\sin yx\,dy\,dt =$$

$$= \int_0^{\infty}\frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot\cos ty\,dt\Big)\cos xy + \Big(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin ty\,dt\Big)\cdot$$

интеграл Фурье

$$\cdot\sin yx\,dy = \int_0^{\infty} a(y)\cos xy + b(y)\cdot\sin xy\,dy, \text{ где}$$

$$a(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot\cos ty\,dt, \quad b(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\sin ty\,dt$$

косинус преобразования Фурье

синус преобр. Фурье

Замечание! Эти формулы очень похожи на формулы для рядов Фурье

(2.2) Теорема о представимости ф-ии в точке её ~~рядом~~ интегралом Фурье.

<u>Опр.</u> Ф-ия $f: R \to R$ наз-ся кусочно-гладкой, если $\forall l > 0$ сужение этой ф-ии на $[-l, l]$ яв. кусочно-гладкой ф-ией в смысле рядов Фурье

<u>Теорема</u> (о представимости ф-ии в точке ее интегралом Фурье)

Пусть $f: R \to R$ яв. кус.-гладной и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < +\infty$.

Тогда $\forall x \in R$ $\int\limits_{0}^{+\infty} a(y) \cos xy + b(y) \sin xy \, dy$ сходится и равен $\dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$

Док-во: (будем опираться на лемму Римана-Лебега для беск. ~~прот~~ промежутка)

<u>Лемма</u> (Р-Л для беск. промежутка)

Пусть a - вещ. число и $f: \begin{matrix}[a, +\infty) \to R \\ (-\infty, a] \to R\end{matrix}$ такова, что

$\int\limits_{a}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$. Тогда $\lim\limits_{p \to \pm\infty} \int\limits_{a}^{+\infty} f(x) \cos px \, dx =$

$$= \lim_{p \to \pm\infty} \int_{a}^{\infty} f(x) \cdot \sin px \, dx = \lim_{p \to \pm\infty} \int_{a}^{\infty} f(x) e^{ipx} dx = 0$$

(Лемму доказывать не будем).

Фиксируем $A > 0$, обозначим $f_A(x) = \int\limits_{0}^{A} (a(y) \cos xy + b(y) \sin xy) dy$

Требуется доказать, что $f_A(x) \xrightarrow[A \to +\infty]{} \dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$

Преобразуем $f_A(x)$: $\int\limits_{0}^{A} \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \cos ty \, dt \right) \cos xy + \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \sin ty \, dt \right) \cdot$

$\cdot \sin xy \, dy = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{A} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \cos (t - x) y \, dt \, dy$

Лекция 7. (14.10.19)

Обсудим законность изменения порядка интегрирования:

(А) Теорема Фубини: пусть $\tilde{f}:(a,b)\times(c,d)\to\mathbb{R}$ и

$\iint\limits_{(a,b)\times(c,d)} \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy$ сходится. Тогда сходятся оба повторных

интеграла и имеет место равенство $\iint\limits_{(a,b)\times(c,d)} \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy =$

$$= \int_a^b \int_c^d \tilde{f}(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy.$$

В нашем случае $a=0$, $b=A$, $c=-\infty$, $d=+\infty$, $\tilde{f}(y,t)=f(t)\cdot\cos(t-x)y$

(Б) Если ф-ия абс. интегр., то она интегрируема

В нашем случае достаточно проверить, что $\iint\limits_{(-\infty,+\infty)\times(0,A)} |\tilde{f}(y,t)|\,dy\,dt$ - сх-ся

(В) Теорема Тонелли: Если $g:(a,b)\times(c,d)\to\mathbb{R}$, $g(x,y)\geqslant 0$ $\forall x,y$ и

пусть хоть один из повторных интегралов сходится, тогда сходится

второй повторный интеграл, двойной интеграл и они равны.

В нашем случае достаточно убедиться, что сходится хоть один

из повторных интегралов: $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^A |f(t)\cdot\cos(t-x)y|\,dy\right)dt \ominus$

Рассмотрим этот интеграл:

$$\ominus \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \int_0^A \underbrace{|\cos(t-x)y|}_{\leqslant 1}\,dy\,dt \leqslant A\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt \text{ - сходится по условию}$$

Тем самым мы обосновали законность изменения порядка интегрирования.

$$f_A(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^A f(t)\cdot\cos(t-x)y\,dy\right)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt\cdot\left.\frac{\sin(t-x)y}{t-x}\right|_{y=0}^{y=A} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\frac{\sin(t-x)A}{t-x}\,dt =$$

$$= \langle t-x=u\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+u)\cdot\frac{\sin Au}{u}\,du = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\ldots + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\ldots =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(f(x+u)+f(x-u)\right)\cdot\frac{\sin Au}{u}\,du = \frac{1}{\pi}\int_0^1\ldots + \frac{1}{\pi}\int_1^{\infty} = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^1 [f(x+u) + f(x-u)]\frac{\sin Au}{u}\,du = \frac{1}{\pi}\int_0^1 [f(x+u) - f(x+0)]\cdot$$

$\underset{\pm f(x\pm 0)}{\uparrow}$

$$\cdot\frac{\sin Au}{u}\,du + \frac{1}{\pi}\int_0^1 (f(x-u) - f(x-0))\frac{\sin Au}{u}\,du + \frac{1}{\pi}\int_0^1 [f(x+0)+f(x-0)]\cdot$$

лемма Р-Л

$\cdot\frac{\sin Au}{u}\,du$. Этот интеграл $\to 0$ при $A\to\infty$, если $\int_0^1 |(\ldots)|\,du < +\infty$

$\int_0^1 \frac{f(x\pm u) - f(\pm 0)}{u}$ – должна сущ

$$\int_0^1 \frac{\sin Au}{u}\,du = \int_0^A \frac{\sin z}{z/A}\cdot\frac{dz}{A} \to \int_0^\infty \frac{\sin z}{z}\,dz = \frac{\pi}{2}$$

замена $Au = z$

абс. интегр. Для кусочно гладких функций такой предел в нуле существует

$$I_1 = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\int_1^\infty (f(x+u) + f(x-u))\frac{\sin Au}{u}\,du \underset{A\to+\infty}{\to} 0$$ по лемме Р-Л для

бесконечного промежутка, если $\int_1^\infty |(\ldots)|\,du < +\infty$

$$I_4 = \int_1^\infty \left|\frac{f(x+u) + f(x-u)}{u}\right| \le \int_1^\infty \frac{|f(x+u)|}{u}\,du + \int_1^\infty \frac{|f(x-u)|}{u}\,du \le$$

$$\underset{u\geq 1}{\le} \int_1^{+\infty} |f(x+u)|\,du + \int_1^\infty |f(x-u)|\,du \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt < +\infty \quad (t = x-u)$$

■

(2.3) Представление функции на полупрямой её интегралом Фурье.

Пусть $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и пусть $\forall x\in\mathbb{R}$ $f(x) = \int_0^\infty a(y)\cdot\cos xy +$

$+ b(y)\cdot\sin xy\,dy$, где $a(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos ty\,dt$,

$b(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin ty\,dt$

Допустим, кроме того, что f – чётная, тогда $b(y) = 0$,

$$(1)\ a(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(t)\cdot\cos ty\,dt; \quad (2)\ f(x) = \int_0^{+\infty} a(y)\cos xy\,dy$$

прямое косинус-преобразование — обратное косинус-преобразование

Теперь допустим, что $f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$. Мы можем продолжить f на $\mathbb{R}$ до чётной или нечётной функции, а затем воспользоваться формулами (1)-(2) или аналогичными с синусами

2.4 Представление функции её интегралом Фурье (пример)

Пусть $a>0$, $f(x): [0;+\infty) \to \mathbb{R}$ и задана ~~функцией~~ функцией $f(x) = e^{-ax}$. Воспользуемся формулами (1)-(2):

$$a(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-at}\cos ty\,dt = (\text{по частям}) = \frac{2a}{\pi(a^2+y^2)} \to$$

$$\to f(x) = e^{-ax} = \int_0^{+\infty} a(y)\cos xy\,dy = \frac{2a}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos xy}{a^2+y^2}\,dy \to$$

$$\to \int_0^{\infty}\frac{\cos xy}{y^2+a^2}\,dy = \frac{\pi}{2a}e^{-ax} \text{ — интеграл Лапласа}$$

через синусы:

$$b(y) = \frac{2}{\pi}\frac{y}{y^2+a^2}$$

$$f(x) = e^{-ax} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{y\sin xy\,dy}{y^2+a^2} \to \int_0^{\infty}\frac{y\sin xy\,dy}{y^2+a^2} = \frac{\pi}{2}e^{-ax}$$

Лекция 8 (21.10.19)

2.5 Интеграл Фурье в комплексной форме. Прямое и обратное преобразование Фурье. Формула обращения.

Пусть $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что $\forall x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$f(x) = \int_0^{+\infty} a(y)\cos xy + b(y)\sin xy\,dy, \text{ где}$$

$$a(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos ty\,dt \quad (1)$$

$$b(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin ty\,dt \quad (2)$$

$$\cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} \quad (3)$$

$$\sin\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i} \quad (4)$$

Тогда $f(x)=\int_0^{+\infty}\left(a(y)\frac{e^{ixy}+e^{-ixy}}{2}+b(y)\cdot\frac{e^{ixy}-e^{-ixy}}{2i}\right)dy=$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{a(y)-i\,b(y)}{2}e^{ixy}dy+\int_0^{+\infty}\frac{a(y)+i\,b(y)}{2}e^{-ixy}dy=$$

замена $y\to -y$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{a(y)-i\,b(y)}{2}e^{ixy}dy+\left(-\int_0^{-\infty}\frac{a(y)-i\,b(y)}{2}e^{ixy}dy\right)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a(y)-i\,b(y)}{2}e^{ixy}dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot e^{-ity}dt\,e^{ixy}dy\,-$$

- интеграл Фурье в комплексной форме

Введём обозначения:

$\hat{f}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-ity}dt$ - прямое пр-е Фурье

$\check{g}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}g(y)e^{ixy}dy$ - обратное пр-е Фурье, тогда

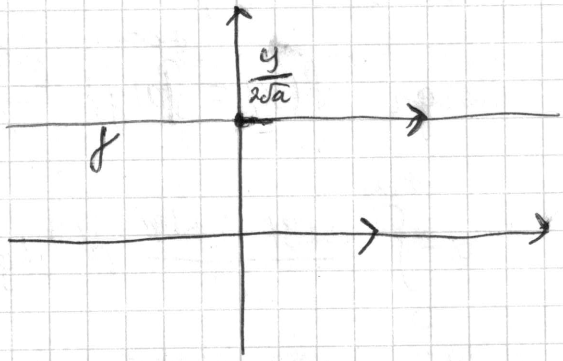
$f(x)=\check{\hat{f}}=\hat{\check{f}}$ - формула обращения для преобр. Фурье

(2.6) Пример вычисления прямого и обратного преобразования Фурье.

Пусть $f: R\to R$, задана формулой $f(x)=e^{-ax^2}$, где $a>0$, $x\in R$

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} e^{-ty}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{a}t + i\frac{y}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \frac{y^2}{4a}}\, dt =$$

$$= \left\{ \text{замена } z = \sqrt{a}t + \frac{iy}{2\sqrt{a}} \right\} = \frac{e^{-\frac{y^2}{4a}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma} e^{-z^2} \frac{dz}{\sqrt{a}} \ominus$$

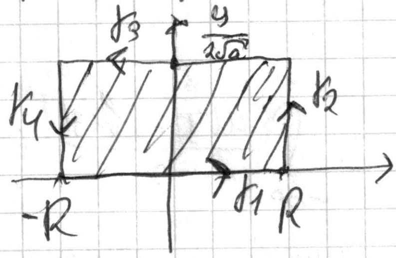


$\ominus$ Из начала $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

Из ТФКП → теорема Коши:

Если D - обл. огр. в $\mathbb{C}$ и $f: D \to \mathbb{C}$ - аналит. в D ф-ия (не содержит ~~...~~ особых точек ни внутри, ни на границе), то

$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 0$. Рассмотрим контур



$$R \to +\infty$$

$$0 = \int_{\partial D} e^{-z^2} dz = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4}$$

$\int_{\gamma_1} \to \sqrt{\pi}$

$\int_{\gamma_3} \to -\int_{\gamma} e^{-z^2} dz$

$$\gamma_2: \left| \int_{\gamma_2} e^{-z^2} dz \right| = \left| \int_0^{\frac{y}{2\sqrt{a}}} e^{-(R^2 + 2iuR - u^2)}\, i\,du \right| \le e^{-R^2} \underbrace{\int_0^{\frac{y}{2\sqrt{a}}} e^{+u^2} du}_{<+\infty} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

$z = R + iu,\ 0 \le u \le \frac{y}{2\sqrt{a}}$

γ_4 аналогично $(z = -R + iu),\ \frac{y}{2\sqrt{a}} \le u \le 0$

$$\int_{\gamma} = \sqrt{\pi}$$

$$\check{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{+ity} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-it(-y)} dt =$$

$$= \hat{f}(-y)$$

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{a}} e^{-\frac{y^2}{4a}} = \check{f}(y)$$

(2.7) Быстро убывающие ф-ии

Опр. 1 Мультииндекс $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, где

$\forall k = 1, \dots, n$ α_k явл. неотр. целым числом.

n - длина мультииндекса

$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ - вес мультииндекса

$\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$

$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$

$\alpha \le \beta$, если $\forall k = 1 \dots n$ $\alpha_k \le \beta_k$

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$ - производная порядка α

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}, \quad x = (x_1 \dots x_n) \in R^n$$

Опр. 2 Говорят, что $f: R^n \to \mathbb{C}$ явл. быстро убывающей, если

(1) $f \in C^\infty(R^n)$

(2) $\forall \alpha$ - мультииндекс и $\forall p > 0$ $\exists K_{\alpha,p} = const$,

$$|D^\alpha f(x)| \le \frac{K_{\alpha,p}}{(1+|x|)^p} \quad \forall x \in R^n$$

Опр 3 Говорят, что $f: R^n \to \mathbb{C}$ явл быстро убыв., если выполнено:

(1) $f \in C^\infty(R^n)$

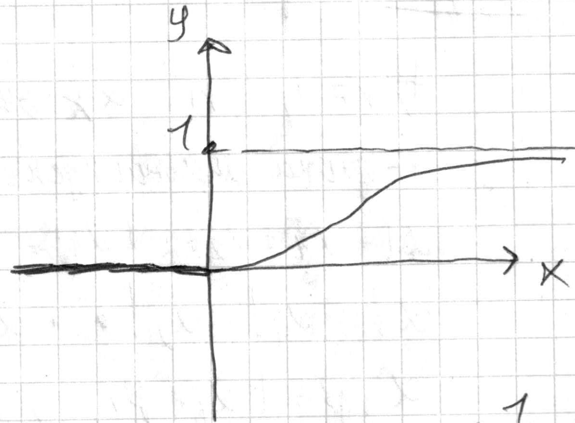
(2) $\forall\, \alpha, \beta$ - мультииндексы $\exists\, C_{\alpha,\beta} = \mathrm{const}$: $|x^\alpha D^\beta f(x)| \le C_{\alpha,\beta}$

Лемма (без док-ва)

Опр. 2 и 3 эквивалентны.

Построим примеры б. у. ф.

Из матана $\to$ $\omega(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$



Св-ва:

1) $\omega(x) \ge 0 \quad \forall x \in R$

2) $\omega(x) > 0 \quad \forall\, x > 0$

3) $\omega \in C^\infty(R)$

Идея док-ва свойства 3): $\forall x > 0 \quad \frac{d^n \omega(x)}{dx^n} = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$
индукция по n

$$\left.\begin{array}{l} \text{Тогда } \dfrac{d^n(\omega)}{dx^n} \xrightarrow[x \to +0]{} 0 \\ \text{Для } x < 0 \ \dfrac{d^n \omega}{dx^n} = 0 \end{array}\right\} \to \text{для } x = 0 \ \frac{d^n \omega}{dx^n}(0) = 0$$

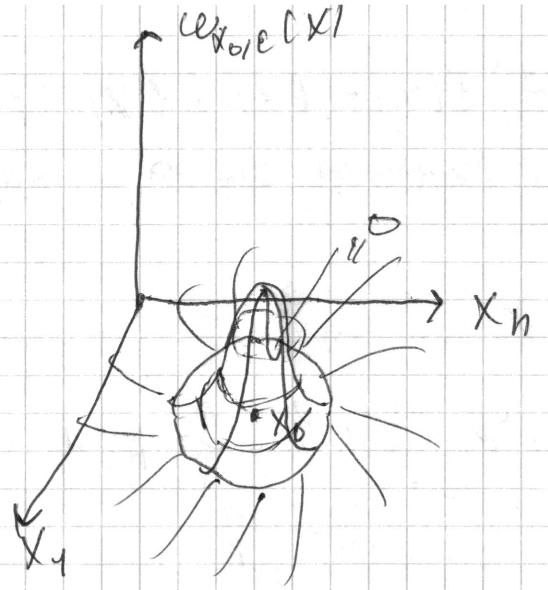
Фиксируем $x_0 \in R^n$, $\varepsilon > 0$. Положим $\omega_{x_0,\varepsilon}(x) =$
$= \omega(\varepsilon^2 - |x - x_0|^2)$.

Св-ва:

1) $\omega_{x_0,\varepsilon} \in C^\infty(R^n)$

2) $\omega_{x_0,\varepsilon}(x) = 0 \quad \forall x: |x - x_0| > \varepsilon$

3) $\omega_{x_0,\varepsilon}(x) > 0 \quad \forall x: |x - x_0| < \varepsilon$



Опр. Ф-ия $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ - финитная, если она обращается в 0 вне некоторого шара в $\mathbb{R}^n$ конечного радиуса.

Пример 1 б. у. ф:

Всякая бесконечно дифф. финитная ф-ия является б. у. ф.
Проверим условие (2) из опр. 3: $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\forall \alpha, \beta$ - мульт.

$|x^\alpha \cdot D^\beta f(x)| \le \sup\limits_{x \in B} |x^\alpha \cdot D^\beta f(x)| \ominus$ где B - тот шар конечного радиуса, вне которого $f(x) \equiv 0$ (f - финитна, такой шар есть)

По теореме Вейерштрасса (max на компакте) $\exists x_0 \in B$: $f(x_0) = \sup\limits_{x \in B} f(x)$

$\ominus$ $|x_0^\alpha D^\beta f(x_0)| \overset{\text{обозн.}}{=} C_{\alpha,\beta}$

Лекция 9 (28.10.19)

Пример 2 б. у. ф.:

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$ и $a_1 > 0, \dots a_n > 0$, тогда $f(x) = e^{-a_1 x_1^2 - a_2 x_2^2 - \dots - a_n x_n^2}$ яв. быстро убыв. (но не финитной)
Идея док-ва:
$f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ - очевидно

$\forall \alpha$ - мультииндекс $\mathcal{D}^{\alpha} f(x) = P(x) f(x)$, где $P(x)$ - некоторый многочлен и экспонента на ∞ растёт быстрее любого многочлена.

Св-ва б.у.ф.:

1) Если f, g - б.у.ф., то $\forall a, b \in \mathbb{C}$ ф-ия $af + bg$ яв. б.у.ф.

Док-во:

проверим выполнение опр. 3:

$af + bg \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n) \to 1)$ - выполнено

Пусть α, β - мультииндексы,

$$|x^{\alpha} \mathcal{D}^{\beta}(af + bg)| \le |\underbrace{a x^{\alpha} \mathcal{D}^{\beta} f(x)}_{\le C_{\alpha,\beta}(f)}| + |\underbrace{b x^{\alpha} \mathcal{D}^{\beta} g(x)}_{\le C_{\alpha,\beta}(g)}| \le$$

$$\le |a| \cdot C_{\alpha\beta}(f) + |b| \cdot C_{\alpha\beta}(g) = const \to 2)$$ - выполнено.

2) Если f - б.у.ф, то $\forall \alpha$ - мульт. $\mathcal{D}^{\alpha} f$ - б.у.ф.

Док-во: проверяем опр. 3

$\mathcal{D}^{\alpha} f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n) \to 1)$ выполнено

Пусть β, γ - мульт.

$|x^{\beta}| \mathcal{D}^{\gamma}(\mathcal{D}^{\alpha} f(x)) = |x^{\beta}| \mathcal{D}^{\alpha+\gamma} f(x) \le C_{\beta, \alpha+\gamma} \to 2$ - вып.

3) Если f - б.у.ф и α - мульт, то $x^{\alpha} f(x)$ - б.у.ф

Док-во: опр. 3

$x^{\alpha} f(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n) - 1)$ - вып

Пусть β, γ - мульт.

$|x^{\beta} \cdot \mathcal{D}^{\gamma}(x^{\alpha} \cdot f)| =$

Из матана: $\frac{d}{dx}(u(x) v(x)) = \frac{du}{dx} v(x) + \frac{dv}{dx} \cdot u(x)$

Упр. $\frac{d^2}{dx^2}(u(x), v(x))$

В общем случае (много переменных и производная высшего порядка)

$$\mathcal{D}^{\alpha}(u, v) = \sum_{\beta \le \alpha} C_{\alpha}^{\beta} (\mathcal{D}^{\beta}(u))(\mathcal{D}^{\alpha-\beta} v) \text{ - без док-ва}$$

$$= |x^{\beta} \sum_{\delta \le \gamma} C_{\gamma}^{\delta} (\underbrace{\mathcal{D}^{\delta} x^{\alpha}}_{A_{\alpha,\delta} \cdot x^{\alpha-\delta}})(\mathcal{D}^{\gamma-\delta} f(x))| \le$$

$$\le \sum_{\delta \le \gamma} |C_{\gamma}^{\delta} A_{\alpha\delta}| \cdot | x^{\beta+\alpha-\delta} \cdot \mathcal{D}^{\gamma-\delta} f(x)| \le$$

$$\le \sum_{\delta \le \gamma} |C_{\gamma}^{\delta} A_{\alpha\delta}| \cdot C_{\beta+\alpha-\delta, \gamma-\delta} = \underset{\text{2)- вып}}{const} < \infty \quad \forall x \in R^n$$

4) Если f - б. у. ф. и $P(x)$ - произв. многочлен, тогда $P(x) \cdot f(x)$ - б. у. ф.

Док-во: $= \sum_{|\alpha| \le N} C_{\alpha} x^{\alpha}$, тогда $P(x) \cdot f(x) = \underbrace{\sum_{|\alpha| \le N} C_{\alpha} \underbrace{x^{\alpha} \cdot f(x)}_{\text{б. у. ф. по св. 3}}}_{\text{б. у. ф. по св. 1}}$

Замечание: Из св. 1. следует, что мн-во всех б. у. ф. $f: R^n \to C$ образуют лин. пр-во. Это лин. пр-во обозн. $\mathcal{S}(R^n) = S(R^n)$

2.8 Преобр. Фурье б. у. ф.

Опр. Пусть $f: R^n \to C$ - б. у. ф. Построим две новые ф-ции:

$$\hat{f}(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} f(x) e^{-i(x \cdot y)} dx \qquad (*)$$

$$\check{f}(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} f(x) e^{i(x \cdot y)} dx, \text{ где} \qquad (**)$$

$(x \cdot y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ - скаляр. пр-е векторов x, y из R^n

Прямым преобразованием Фурье ф-ии f называют:

а) ф-ию $\hat{f}(y)$, заданную формулой (*);

эту функцию обозначают так же $F_+[f(x)](y)$

б) правило, сопоставляющее ф-ии f ф-ию $\hat{f}$, т.е. $F_+: f \mapsto \hat{f}$

Обратным преобр. Фурье ф-ии f называют:

в) ф-ию $\check{f}(y)$, зад. формулой (**), иногда обозначают $F_-[f(x)](y)$

г) правило, сопоставляющее f ф-ию $\check{f}$, т.е. $F_-: f \mapsto \check{f}$

Замечание:

Оба интеграла в ф-лах (*) и (**) сходятся:

$$|f(x) \cdot e^{\pm i(x,y)}| = |f(x)| \leq \frac{K}{1+|x|^p} \quad \forall p>0 \ \exists K = const$$

нер-во выполняется $\forall x \in R^n$

из опр. 2

ф-ая $\frac{K}{1+x^p}$ интегр. по R^n, если $p>n \to f(x) e^{\pm i xy}$ - инт. по ~~[illegible]~~ R^n

Замечание: При $n=1$ ф-ии (*) и (**) дают преобр. Фурье, кот. мы изучали в 2.5.

Св-ва преобр. Фурье: Здесь f и g - б. у. ф.

1) Линейность

$\forall a, b \in C \quad F_\pm(af+bg) = aF_\pm(f) + bF_\pm(g)$

Док-во:

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R^n} (af(x) + bg(x)) e^{\pm i xy} dx \underset{\text{линейность интеграла}}{=} aF_\pm f(x) + bF_\pm g(x)$$

2) Преобр. Фурье переводит операцию умножения на независимую переменную в операцию дифф. с помощью ф-ю числового множителя 1

$$F_\pm[x^\alpha f(x)] = (\pm i)^{|\alpha|} \cdot \mathcal{D}^\alpha [F_\pm[f(x)]]$$

Док-во:

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R^n} f(x) \cdot e^{\mp i(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)} dx$$

$$\mathcal{D}^\alpha [F_\pm [f(x)]] = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial y_1^{\alpha_1} \partial y_2^{\alpha_2} \dots \partial y_n^{\alpha_n}} [F_\pm [f(x)]] =$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \cdot \int_{R^n} f(x) \cdot ((\mp i x_1)^{\alpha_1} \cdot (\mp i x_2)^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot (\mp i x_n)^{\alpha_n}) \cdot e^{\mp i(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)} dx =$$

$$= \dots \int_{R^n} f(x) \cdot (\mp i)^{|\alpha|} \cdot \underbrace{x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}}_{x^\alpha} = (\mp i)^{|\alpha|} (2\pi)^{-n/2} \cdot$$

$$\cdot \int_{R^n} x^\alpha f(x) e^{\mp i(x,y)} dx = \frac{1}{(\mp i)^{|\alpha|}} F_\pm [x^\alpha f(x)](y)$$

Обоснуем дифф. по параметру под интегралом:

Из матана: интеграл можно дифф. по параметру под знаком интеграла, если 1) интеграл сходится, 2) подинтегральная ф-ия имеет производную нужного порядка, 3) у производной должна быть интегр. мажоранта $|x^\alpha f(x) e^{\mp i(x,y)}| = |\underbrace{x^\alpha f(x)}_{б.у.ф.}| \underset{опр. 2}{\leq} \frac{K}{1+|x|^p}$ - интегр. по R^n, если $p > n$

3) Преобр. Фурье переводит операцию дифф. на операцию умножения на независимую переменную с помощью ф-ю числового множителя:

$\forall \alpha$ - мульт. справедливо равенство:

$$F_\pm [\mathcal{D}^\alpha f(x)](y) = (\pm i y)^\alpha \cdot F_\pm [f(x)](y)$$

Замечание: Св-ва 2-3 показывают, что преобр. Фурье аналогично ф-ии log

Док-во:

Пусть сначала $\alpha = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$
k-е место

$$F_{\pm}[\mathcal{D}^\alpha f(x)](y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} \frac{\partial f}{\partial x_k} e^{\mp i(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n)} dx =$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_k} e^{\mp i x_k y_k} dx_k \right] \cdot e^{\mp i(x_1 y_1 + \ldots + x_{k-1} y_{k-1} + \ldots + x_n y_n)} dx_1 dx_2 \ldots dx_{k-1} dx_{k+1} \ldots dx_n \circledequal$$

по частям

$$\stackrel{\text{}}{=} \underbrace{f(x)}_{\text{б.у.ф.}} e^{\mp i x_k y_k} \Big|_{x_k = -\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\mp y_k) e^{\mp i x_k y_k} dx_k$$

$\to 0$

$$\circledequal (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} f(x) \cdot (\pm i y_k) \cdot e^{\mp i(x,y)} dx = \pm i F_{\pm}[\overset{y^\alpha}{\overset{\|}{y_k}} \cdot f(x)] =$$

$$= (\pm i)^{|\alpha|} y^\alpha F_{\pm}[f(x)](y)$$

Лекция 10 (11 ноября)

Докажем 3) в общем случае индукцией по весу мультииндекса α.

База индукции: $\alpha = 1$ — доказано

Шаг индукции:

предположим, что св-во 3 выполнено для всех мультииндексов веса N и докажем его для любого мультииндекса $\beta = N + 1$. Пусть $k = 1 \ldots N$, и таков, что $\beta_k \geq 1$. Положим $\alpha = (0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$
k-е место

Тогда $\beta - \alpha$ имеет вес N

$$F_{\pm}[\mathcal{D}^\beta f(x)](y) = F_{\pm}[\mathcal{D}^{\beta - \alpha}(\mathcal{D}^\alpha f(x))](y) =$$

$$= (\pm i y)^{\beta - \alpha} \cdot F_{\pm}[\mathcal{D}^\alpha f(x)](y) = (\pm i y)^\beta F_{\pm}[f(x)](y).$$

по базе индукции св-во 3 верно для такого мультииндекса

4) Преобразование Фурье переводит сдвиг по аргументу в сдвиг по фазе.

$$F_{\pm}[f(x-x_0)](y) = e^{\mp i(x_0,y)} \cdot F_{\pm}[f(x)]$$

Док-во: $F_{\pm}[f(x-x_0)](y) = (2\pi)^{-n/2} \cdot \int\limits_{R} f(x-x_0) \cdot e^{\mp i(x,y)} dx =$

$$= \langle x - x_0 = z \rangle = (2\pi)^{-n/2} \cdot e^{\mp i(x_0,y)} \cdot \int\limits_{R} f(z) e^{\mp i(z,y)} dz \blacksquare$$

5) Правило изменения масштаба. Пусть $a \in R$, $a \neq 0$. Тогда

$$F_{\pm}[f(ax)](y) = \frac{1}{|a|^n} \cdot F_{\pm}[f(x)]\left(\frac{y}{a}\right)$$

Док-во: $F_{\pm}[f(ax)](y) = (2\pi)^{-n/2} \cdot \int\limits_{R^n} f(ax) e^{\mp i(x,y)} dx =$

$$= \langle ax = z,\ dx = \underbrace{\frac{dz}{|a|^n}}_{\text{Ф. Якобиан}} \rangle = (2\pi)^{-n/2} \cdot \int\limits_{R^n} f(z) \cdot e^{\mp i(z \cdot \frac{y}{a})} \frac{dz}{|a^n|} \blacksquare$$

6) Формула обращения:

$$F_{\pm}[F_{\mp}[f]] = f$$

Док-во: Индукцией по n

База индукции $n=1$ - доказано

Шаг индукции: Допустим, что для всех по n св-во 6 уже доказано и докажем для $n+1$.

$$F_{\pm}[F_{\mp}[f(x)](y)](x) = (2\pi)^{-n-1} \cdot \int\limits_{R^{n+1}} \cdot \int\limits_{R^{n+1}} f(x) \cdot e^{\pm i(x,y)} dx_1 \ldots dx_{n+1}$$

$x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$

$$\cdot e^{\mp i(x,y)} dy_1 \ldots dy_{n+1} = \langle (2\pi)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1 \ldots x_{n+1}) e^{\pm i x_{n+1} \cdot y_{n+1}} d x_{n+1} \cdot$$

$$\cdot e^{\mp y_{n+1} \cdot x_{n+1}} d y_{n+1} \rangle \cdot (2\pi)^{-n} \cdot \int\limits_{R^n}\int\limits_{R^n} e^{\pm i(x_1 y_1 + \ldots x_n y_n)} dx_1 \ldots dx_n \cdot e^{\mp i(x_1 y_1 + x_n y_n)} dy_1 \ldots dy_n$$

преобр. Фурье по переменным $n+1$

$$= (2\pi)^{-n} \cdot \int\limits_{R_n} \cdot \int\limits_{R_n} F_{\pm}[F_{\mp}[g(x_{n+1})](y_{n+1})] e^{\pm i(x_1 y_1 + \ldots x_n y_n)} dx_1 \ldots dx_n \cdot e^{\mp i(x_1 y_1 \ldots x_n y_n)} dy_1 \ldots dy_n =$$

$\parallel f(x_1 x_2 \ldots x_n, x_{n+1} \ldots$

$$= (2\pi)^{-n/2} \cdot \int_{R^n} F_{\mp}[g(x_1 \ldots x_n)](y_1 \ldots y_n)\, e^{\mp i(y_1x_1 \ldots y_nx_n)} dy_1 \ldots dy_n =$$

$$= F_{\pm}[F_{\mp}[g(x_1 \ldots x_n)](y_1 \ldots y_n)](x_1 \ldots x_n) \Rightarrow$$ доказано по предположению шага индукции $= g(x_1 \ldots x_n) = f(x_1 \ldots x_n, x_{n+1})$ ∎

(2.9) Равенство Парсеваля

Теорема (рав-во Парсеваля)

Пусть $f, g \in S(R^n)$, $n \geq 1$, тогда $\int_{R^n} f(x)\overline{g(x)}dx =$

$$= \int_{R^n} F_{\pm}[f](y)\, \overline{F_{\pm}[g](y)}\, dy$$

Док-во:

Шаг I:

$$\int_{R^n} f(x) \cdot F_{\pm}[g](x)dx = \int_{R^n} F_{\pm}[f](x)\, g(x)dx$$

$$\int_{R_n} f(x)(2\pi)^{-n/2} \cdot \int_{R^n} g(y)\, e^{\mp i(y,x)} dy\, dx =$$ (меняем порядок интегр.) $=$

$$= \int_{R^n} g(y) \cdot 2\pi^{-n/2} \cdot \int_{R^n} f(x)\, e^{\mp i(y,x)} dx\, dy = \int_{R_n} F_{\pm}[f](y)\, g(y) dy$$

Шаг II:

$$\overline{F_{\pm}[f](x)} = F_{\mp}[\overline{f}](x)$$

$$\overline{(2\pi)^{-n/2}\int_{R^n} f(y)\, e^{\mp i(x,y)} dy} = (2\pi)^{-n/2}\int_{R^n} \overline{f}(y)\, e^{\pm i(x,y)} dy$$

Шаг III:

$$\int_{R^n} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx = \int_{R^n} F_{\pm}[F_{\mp}[f]](x) \cdot \overline{g(x)}\, dx =$$

$$= \int_{R^n} F_{\mp}[f](x) \cdot \overline{F_{\mp}[g](x)}\, dx$$ ∎

Замечание: Рав-во Парсеваля для преобр. Фурье аналогично для рав-ва Ляпунова для рядов Фурье

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2 dx=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|C_n|^2$$

при $f=g$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2=\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(x)|^2 dx$$

2.10 Дальнейшие св-ва преобр. Фурье

Опр. Пусть $f, g\in S(\mathbb{R}^n)$. Тогда ф-ия

$$(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,g(y)\,dy$$ - наз-ся свёрткой.

Св-ва свёртки:

1) $f*g=g*f$

2) $(f*g)*h=f*(g*h)$ - ассоциативность

3) $\forall a,b\in\mathbb{C}$ $(af+bg)*h=a\cdot(f*h)+b(g*h)$ - линейность.

4) Правило дифф-ия свёртки:

$\forall\alpha$ - мульт. $\mathcal{D}^\alpha(f*g)=(\mathcal{D}^\alpha f)*g=f*(\mathcal{D}^\alpha g)$

5) $F_\pm[f*g]=(2\pi)^{n/2}\cdot F_\pm[f]\cdot F_\pm[g]$ - преобр. Фурье переводит свёртку в умножение с точностью до константы

6) $F_\pm[f\cdot g]=2\pi^{-n/2}F_\pm[f]*F_\pm[g]$

Док-во: св-во (5)

$$F_\pm[f*g](x)=(2\pi)^{-n/2}\cdot\int_{\mathbb{R}^n}(f*g)(y)\cdot e^{\mp i(x,y)}dy=$$

$$=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}f(y-z)\cdot g(z)\,dz\cdot e^{\mp i(x,y)}dy=$$

$= (2\pi)^{-n/2} \cdot \int\limits_{R^n} \int\limits_{R^n} f(y-z) \cdot e^{\mp i(x,y)} dy \cdot g(z) dz =$

$\uparrow$ $y - z = t$

Лекция 11 (18 ноября)

$$= (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{R^n} \Big[\int\limits_{R^n} f(t) e^{\mp i(x, z+t)} dt \Big] g(z) dz =$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{R^n} \int\limits_{R^n} f(t) e^{\mp i(x,t)} dt \cdot e^{\mp i(x,z)} \cdot g(z) dz =$$

$$= F_{\pm}[f(t)](x) \cdot \int\limits_{R^n} g(z) \cdot e^{\mp i(x,z)} dz =$$

$$= F_{\pm}[f(t)](x) \cdot (2\pi)^{n/2} \cdot F_{\pm}[g(z)](x) \blacksquare$$

Док-во: (свойство 6)

Применим св-во 5 к функциям $F_{\mp}[f]$ и $F_{\mp}(g)$

$$F_{\pm}[F_{\mp}[f] * F_{\mp}[g]] = 2\pi^{n/2} \cdot F_{\pm}[F_{\mp}[f]] \cdot$$

$$\cdot F_{\pm}[F_{\mp}[g]] = (2\pi)^{n/2} \cdot f(x) g(x)$$

Подействуем на это равенство $F_{\mp}$:

$$F_{\mp}[f] * F_{\mp}[g] = F_{\mp}[f \cdot g] \cdot (2\pi)^{n/2} \blacksquare$$

Теорема (ф-ла Пуассона) - без док-ва!

Если f - б.у.ф. на R^1, то $\sqrt{2\pi} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f(2\pi n) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)$

Теорема (ф-ла Котельникова - Шеннона) без док-ва!

Пусть f - б.у.ф. на R^1 и $\exists a > 0$: $\hat{f}(x) = 0$ $\forall x$: $|x| > a$.

Тогда $f(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi n}{a}\right) \cdot \mathrm{sinc}\underbrace{\left(a\left(x - \frac{\pi n}{a}\right)\right)}_{t}$

$\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin t}{t}$ – ф-ия отсчётов

Замечание: Все утв. в п. 2.10 являются матем. основанием теории передачи сигналов

§ 3. Преобр. Лапласа

3.1 Определение и основные св-ва преобр. Лапласа

Опр. 1 Ф-ия $f : [0; +\infty) \to \mathbb{C}$ наз-ся оригиналом, если:

(1) она непрерывна всюду, кроме, может быть, конечного числа точек;

(2) $\exists a \in \mathbb{R}: \int\limits_0^{+\infty} |f(t)| e^{-at} dt < +\infty$

Опр. 2 Пусть f - оригинал. Положим $a(f) = \inf\{a \in \mathbb{R} : \int\limits_0^{\infty} |f(t)| e^{-at} dt < +\infty\}$ - показатель роста ф-ии f.

Пояснение: $\{a \in \mathbb{R} \mid \int\limits_0^{\infty} |f(t)| e^{-at} dt < +\infty\}$ – интервал в $\mathbb{R}$, т.к. если a принадлежит этому мн-ву, то $\forall b > a$ тоже принадлежит этому мн-ву. Для нас важно, что $a(f)$ может как принадлежать этому ~~интервалу~~ мн-ву, так и не принадлежать. Но в любом случае $\forall \varepsilon > 0$ число $a(f) + \varepsilon$ принадлежит мн-ву.

Опр. 3 Пусть $f : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ - оригинал. Тогда $\forall p \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, p > a(f)$ построим новую ф-ию

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt \quad (*)$$