Тогда $f(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi n}{a}\right) \cdot \operatorname{sinc}\underbrace{\left(a\left(x - \frac{\pi n}{a}\right)\right)}_{t}$

$\operatorname{sinc}(t) = \frac{\sin t}{t}$ - ф-ия отсчётов

Замечание: Все утв. в п. 2.10 являются матем. основанием теории передачи сигналов

§3. Преобр. Лапласа

3.1 Определение и основные св-ва преобр. Лапласа

Опр. 1 Ф-ия $f: [0; +\infty) \to \mathbb{C}$ наз-ся оригиналом, если:

(1) она непрерывна всюду, кроме, может быть, конечного числа точек;

(2) $\exists a \in \mathbb{R}: \int\limits_0^{+\infty} |f(t)| e^{-at} dt < +\infty$

Опр. 2 Пусть f - оригинал. Положим $a(f) = \inf\{a \in \mathbb{R} : \int\limits_0^{\infty} |f(t)| e^{-at} dt < +\infty\}$ - показатель роста ф-ии f.

Пояснение: $\{a \in \mathbb{R} \mid \int\limits_0^{\infty} |f(t)| e^{-at} dt < +\infty\}$ - интервал в $\mathbb{R}$, т.к. если a ~~принадлежит~~ этому мн-ву, то $\forall b > a$ тоже принадлежит этому мн-ву. Для нас важно, что $a(f)$ может как принадлежать этому ~~интервалу~~ мн-ву, так и не принадлежать. Но в любом случае $\forall \varepsilon > 0$ число $a(f) + \varepsilon$ принадлежит мн-ву.

Опр. 3 Пусть $f: [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ - оригинал. Тогда $\forall p \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} p > a(f)$ построим новую ф-ию

$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt \quad (*)$

Говорят, что $F(p)$ явл. преобр. Лапласа ф-ии $f(t)$.

$$f(t) \risingdotseq F(p) \quad \text{или} \quad F(p) = \mathcal{L}\{f\}(p)$$

Опр. 4. Иногда преобр. Лапласа называют само правило, сопоставляющее оригиналу $f(t)$ ф-цию $F(p)$ с помощью формулы (*).

Замечание. Если $\operatorname{Re} p > a(f)$, то интеграл (*) сходится

$$\left| \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \right| \le \int_0^{\infty} |f(t)| \cdot \underbrace{|e^{-pt}|}_{\substack{\parallel \\ e^{-\operatorname{Re} p \cdot t} \\ \quad \searrow a(f)}} dt$$

Св-ва пр-ний Лапласа (здесь f, g - оригиналы, а св-ва надо читать так: „если" сущ. преобр. Лапласа, стоящие в левой и правой частях равенства, то это имеет рав-во")

1) Линейность $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ имеем

$$\mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\}(p) = \alpha \mathcal{L}\{f\}(p) + \beta \mathcal{L}\{g\}(p)$$

Док-во: $\mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\}(p) = \int_0^{\infty} (\alpha f + \beta g) e^{-pt} dt =$

$$= \alpha \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt + \beta \int_0^{\infty} g(t) e^{-pt} dt$$

Для сходимости $p > \max\{a(f), a(g)\}$

2) (Теорема смещения) $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ имеем

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t} f(t)\}(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}(p+\alpha)$$

Док-во: $\int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-t(p+\alpha)} dt$ ■

Эта ф-ла справедлива для $p \in \mathbb{C}$, таких, что:

$$Re(p+\alpha) > a(f) \Rightarrow Re\,p > a(f) - Re(\alpha)$$

3) (Теорема о дифф. оригинала): смотри 3.4

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(p) = p \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

Док-во: $\int\limits_0^\infty f'(t) e^{-pt} dt \underset{\text{по частям}}{=} f(t) \cdot e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} -$

$$- \int\limits_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt} \cdot (-p) dt = -f(0) + p \cdot \int\limits_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt} dt =$$

$$= p \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

Лекция 12 (25 ноября)

Докажем, что $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) e^{-pt} = 0$

$$\lim_{t \to +\infty} |f(t) e^{-pt}| = \lim_{t \to \infty} \left| e^{-pt} \left[\int\limits_0^t f'(s) ds + f(0) \right] \right| \le$$

$$\le \lim_{t \to \infty} \left[\int\limits_0^t |\underbrace{e^{-pt}}_{\substack{\| \\ e^{-Re\,p \cdot t} \le e^{-[a(f')+\varepsilon]t}}}| \cdot |f'(s)| ds + \underbrace{|e^{-pt}|}_{\to 0} |f(0)| \right] \le$$

$$\le \lim_{t \to +\infty} \int\limits_0^t e^{-[a(f')+\varepsilon] t} \cdot |f'(s)| dS \le \lim_{t \to +\infty} e^{-\frac{\varepsilon t}{2}} \int e^{-[a(f') + \frac{\varepsilon}{2}] t} |f(s)| dS \le$$

$t \geq S$, заменим t - верхний предел.

$$\le \lim_{t \to +\infty} \underbrace{e^{-\frac{\varepsilon}{2} t}}_{\downarrow 0} \cdot \underbrace{\int\limits_0^t e^{-[a(f') + \frac{\varepsilon}{2}] S} |f'(s)| dS}_{const < +\infty} \to \underline{0}$$

Напоминание из матанализа:

Если $\int\limits_a^{+\infty} g(t) dt$ - сходится, то не обязательно $\lim\limits_{t \to \infty} g(t) = 0$

Следствие из (3):

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(p) = p^n \mathcal{L}\{f\}(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots$$

$$- p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Док-во: индукция по n

База: $n=1$ - доказано

Шаг: допустим, что равенство справедливо для n, докажем для $n+1$:

$$\mathcal{L}\{f^{(n+1)}\} = \mathcal{L}\{(f')^{(n)}\} = p^n \mathcal{L}\{f'\} - p^{n-1} f'(0) - p^{n-2} f''(0) - \ldots$$
$$\ldots - p f^{(n-1)}(0) - f^{(n)}(0). \blacksquare$$

4) (Теорема подобия)

$$\mathcal{L}\{f(\alpha t)\}(p) = \frac{1}{\alpha} \mathcal{L}\{f(t)\}\left(\frac{p}{\alpha}\right), \quad \alpha > 0$$

Док-во:

$$\mathcal{L}\{f(\alpha t)\}(p) = \int_0^\infty f(\alpha t) \cdot e^{-pt} dt = \langle \alpha t = u \rangle =$$
$$= \int_0^{+\infty} f(u) \cdot e^{-\frac{pu}{\alpha}} d\frac{u}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot \mathcal{L}\{f(u)\}\left(\frac{p}{\alpha}\right)$$

(3.2) Применение преобр. Лапласа при решении обыкновенных дифф. уравнений

$$\begin{cases} a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n y(t) = f(t) \\ y(0) = c_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)} = c_{n-1} \end{cases}$$

Предположим, что $y, y', \ldots, y^{(n)}, f$ яв. оригиналами.

Применим преобр. Лапласа к уравнению и используем следствие из (3): обозначим $\mathcal{L}\{y\}(p) = Y(p)$, $\mathcal{L}\{f\}(p) = F(p)$

$$a_0 \cdot (p^n Y - p^{n-1} \cdot c_0 - p^{n-2} \cdot c_1 - \ldots - p \cdot c_{n-2} - c_{n-1}) +$$
$$+ a_1 (p^{n-1} Y - p^{n-2} c_0 - p^{n-3} c_1 - \ldots - p \cdot c_{n-3} - c_{n-2}) + \ldots$$
$$+ a_{n-1}(pY - c_0) + a_n Y = F,$$ значит,

$$Y = \frac{F + a_0(p^{n-1}c_0 + p^{n-2}c_1 + \dots p c_{n-2} + c_{n-1}) + \dots + a_{n-1}c_0}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + p a_{n-1} + a_n}$$

Вычисляя обратное преобр. Лапласа от $Y(p)$, найдём частное решение ЗК.

3.9 Дальнейшие св-ва преобразований Лапласа

(5) Аналитичность преобразования Лапласа

$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt$ является аналитической ф-цией комплексного переменного z в $\operatorname{Re} z > a(f)$

Идея док-ва:

$$\frac{d}{dz}F(z) = \frac{d}{dz}\left[\int_0^\infty f(t) e^{-zt} dt\right] \overset{?}{=} \int_0^\infty f(t) \left[\underbrace{\frac{d}{dz} e^{-zt}}_{0,\text{ т.к. } e^{-zt} \text{ -аналитична}}\right] dt = 0$$

условие аналитичности: $\frac{d}{d\bar{z}}F(z) = 0$

Замечание: Уточним исходное определение преобр. Лапласа:

Преобр. Лапласа оригинала $f(t)$ наз-ся аналит. ф-ия комплексного переменного p, которая задается равенством $F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p > a(f)$

(6) (Формула обращения)

Если $f: [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ - оригинал, который является кусочно-гладкой ф-цией и $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}(p)$, тогда $f(t) \overset{\text{опр}}{=}$

$= \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{+pt} dp$. Это равенство справедливо $\forall t > 0$, $\forall a > a(f)$

Док-во: $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt \overset{p = a + i\lambda}{=}$

$= \int_0^\infty f(t) e^{-at} \cdot e^{-i\lambda t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) e^{-i\lambda t} dt$, где

$$f_1(t)=\begin{cases}\sqrt{2\pi}\, f(t)\, e^{-at}, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

$= F_+[f_1(t)](\lambda)$, применим обратное преобр. Фурье

$$F_-[F_+[f_1(t)](\lambda)](t)=f_1(t)=F_-[F(a+i\lambda)](t)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(a+i\lambda)\,e^{+i\lambda t}\,d\lambda=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\, i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(p)\cdot e^{(p-a)t}\,dp \ominus$$

$p=a+i\lambda$

$dp=i\,d\lambda$

Лекция 13 (2 декабря)

$$\ominus \frac{e^{-ta}}{i\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(p)\cdot e^{pt}\,dp;$$ Для $t\geq 0$ имеем

$$f_1(t)=\sqrt{2\pi}\cdot f(t)\cdot e^{-at}=\frac{e^{-at}}{i\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(p)\,e^{pt}\,dp\to$$

$$\to f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(p)\,e^{pt}\,dp.\ \blacksquare$$

<u>Определение:</u> Пусть f и g - оригиналы, тогда символом $f*g$ будем обозначать ф-ию, заданную равенством:

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(u)\cdot g(t-u)\,du.$$ Ф-ию $f*g$ называют свёрткой оригиналов f и g.

<u>Замечание:</u> Это определение не является новым, поскольку оно совпадает с определением свёртки из темы преобр. Фурье.

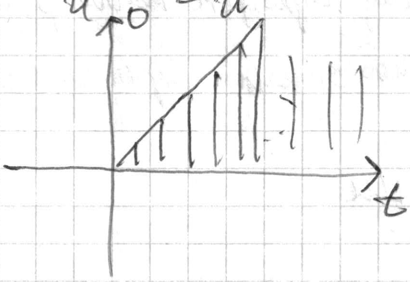
(7) Теорема Бореля об умножении изображений

$$\mathcal{L}[f*g]=\mathcal{L}[f]\cdot\mathcal{L}[g]$$

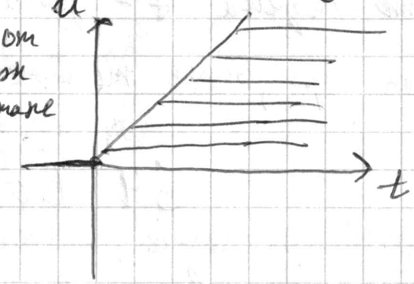
Док-во:

$$\mathcal{L}\{f*g\}(p)=\int_0^\infty (f*g)(t)\,e^{-pt}\,dt=\int_0^\infty\left[\int_0^t f(u)\,g(t-u)\,du\right]e^{-pt}\,dt=$$

$$=\int_0^\infty\left[\int_u^\infty f(u)\,g(t-u)\,e^{-pt}\,dt\right]du = \langle z=t-u\rangle$$



предел зависит от t, изменим порядок интегр., как в матане



$$= \int_0^\infty f(u)\cdot\left[\int_0^\infty g(z)\,e^{-p(z+u)}\,dz\right]du=\int_0^\infty f(u)\,e^{-pu}\,du\cdot\int_0^\infty f(z)\,e^{-pz}\,dz=$$

$$=\mathcal{L}\{f\}\cdot\mathcal{L}\{g\}\ \blacksquare$$

(8) Формула Дюамеля

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}(f*g)\right\}(p)\underset{\text{дифф}}{=}p\cdot\mathcal{L}\{f*g\}-\overset{0}{\overset{\parallel}{(f*g)(0)}}\overset{\text{свертка}}{=}\underline{p\cdot\mathcal{L}\{f\}\cdot\mathcal{L}\{g\}}$$

(3.4) Повторный разбор теоремы о дифф. оригинала

$$\mathcal{L}\{f'\}(p)=p\cdot\mathcal{L}\{f\}(p)-f(0)$$

Вопрос: почему $f(0)$ конечно?

Напоминание док-ва:

$$\mathcal{L}\{f'\}=\int_0^\infty f'(t)\cdot e^{-pt}\,dt=f(t)\cdot e^{-pt}\Big|_0^\infty+p\int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt=$$

$$=\underbrace{\lim_{t\to+\infty}f(t)\cdot e^{-pt}}_{\substack{\parallel\\0\\\text{доказали}}}-\underbrace{\lim_{t\to 0+}f(t)\cdot e^{-pt}}_{\substack{\parallel\\?}}+p\cdot\mathcal{L}\{f\}(p)$$

Почему $\lim\limits_{t\to 0}f(t)=f(0)$? - главный вопрос (и единственный)

Предположим, что предел не равен $f(0)$. Тогда

$\exists\, t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, но $f(t_n) \to f(0) + \alpha$, где $\alpha \neq 0$

Пусть $\alpha < \infty$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(t_n) - f(0)}{t_n - 0} = \infty \to$ ф-ия f не имеет конечной производной в нуле. Этого не может быть, т.к. по условию теоремы f' – оригинал. Под теорему подходят только ф-ии, у которых производные так же оригиналы. (Либо отдельно доопределить в нуле?)

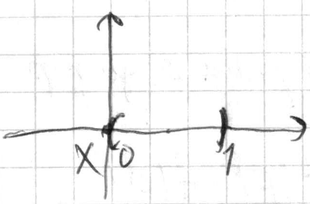
§4. Обобщённые ф-ии

4.1 Пространство основных и обобщённых ф-ий

Напоминание из матана: область в R^n – это открытое связное мн-во. Пример области – открытый шар

Пусть $\varphi : G \to \mathbb{C}$, где G – область в R^n. Носителем ф-ии φ называется мн-во $\operatorname{supp}\varphi = \{x \in R^n \mid \exists\, x_1, \ldots x_k, \ldots \in R^n\ \forall k\ x_k \in G$ и $x_k \to x$, $\varphi(x_k) \neq 0\}$

Пример: $G = (0,1) \subset R$, $\varphi \equiv 1$ в G, тогда $\operatorname{supp}\varphi = [0,1] \not\subset G$



Пусть $x_k = \frac{1}{k}$, тогда $x = 0$ и $x_k \in G$, $\varphi(x_k) = 1$, 0 и 1 тоже являются носителями.

Опр. Ф-ия $\varphi : G \to \mathbb{C}$ наз-ся пробной (основной), если:

1) $\varphi \in C^{(\infty)}(G)$

2) $\operatorname{supp}\varphi$ содержится в G и является огр. мн-вом.

φ из примера выше не является пробной, т.к. $\operatorname{supp}\varphi \not\subset G$

Пример: $\omega_{x_0,\varepsilon}$ обладает свойствами:

1) $\omega_{x_0,\varepsilon} \in C^{(\infty)}(R^n)$

2) $\omega_{x_0,\varepsilon}(x) = 0 \quad \forall x \in R^n : |x - x_0| \geq \varepsilon$