$\exists\, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots \underset{n\to\infty}{\to} 0$, но $f(t_n) \to f(0) + \alpha$, где $\alpha \neq 0$

Пусть $\alpha < \infty$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(t_n) - f(0)}{t_n \to 0} = \infty \to$ ф-ия f

не имеет конечной производной в нуле. Этого не может быть, т.к. по условию теоремы f' – оригинал. Под теорему подходят только ф-ии, у которых производные так же оригиналы. (Либо отдельно доопределить в нуле?)

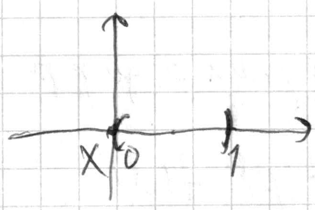
§4. Обобщенные ф-ии

4.1 Пространство основных и обобщённых ф-ий

Напоминание из матана: область в R^n – это открытое связное мн-во. Пример области – открытый шар

Пусть $\varphi : G \to \mathbb{C}$, где G - область в R^n. Носителем ф-ии φ называется мн-во $\operatorname{supp}\varphi = \{x \in R^n \mid \exists\, x_1, .. x_k, .. \in R^n\ \forall k\ x_k \in G$ и $x_k \to x$, $\varphi(x_k) \neq 0\}$

Пример: $G = (0,1) \subset R$, $\varphi \equiv 1$ в G, тогда $\operatorname{supp}\varphi = [0,1] \not\subset G$



Пусть $x_k = \frac{1}{k}$, тогда $x = 0$ и $x_k \in G$, $\varphi(x_k) = 1$, 0 и 1 тоже являются носителями.

Опр. Ф-ия $\varphi : G \to \mathbb{C}$ наз-ся пробной (основной), если:

1) $\varphi \in C^{(\infty)}(G)$

2) $\operatorname{supp}\varphi$ содержится в G и является огр. мн-вом.

φ из примера выше не является пробной, т.к. $\operatorname{supp}\varphi \not\subset G$

Пример: $\omega_{x_0,\varepsilon}$ обладает свойствами:

1) $\omega_{x_0,\varepsilon} \in C^{(\infty)}(R^n)$

2) $\omega_{x_0,\varepsilon}(x) = 0 \quad \forall x \in R^n : |x - x_0| \geq \varepsilon$

3) $\omega_{x_0,\varepsilon}(x)>0 \quad \forall x\in R^n: |x-x_0|\le\varepsilon$

Для неё $\mathrm{supp}\,\omega_{x_0,\varepsilon}(x)$ = замкнутый шар с центром в x_0 радиуса ε =

$= \{x\in R^n \mid |x-x_0|\le\varepsilon\}$

Пример: $G=R$, $\varphi\equiv 0$, $\mathrm{supp}\,\varphi=\{\varnothing\}$

Значит φ - явл. пробной (подходит под опр.)

Замечание. Если φ_1 и φ_2 - пробные ф-ции, то $\forall a,b\in C$

$a\varphi_1+b\varphi_2$ явл. пробной ф-цией, т.к. она беск. дифф. и $\mathrm{supp}(a\varphi_1+b\varphi_2)\subset$

$\subset \mathrm{supp}\,\varphi_1\cup\mathrm{supp}\,\varphi_2$ $\longrightarrow$ совокупность всех пробных ф-ций в

области G образует линейное пр-во. Это пр-во обозначается

$\mathcal{D}(G)$

Лекция 14 (9 декабря)

Опр. Говорят, что посл-ть основных ф-ций $\varphi_1,\dots,\varphi_k,\dots$ сходится

к основной функции $\varphi\in\mathcal{D}(G)$, если ① $\forall\alpha$ - мультииндекс

$D^\alpha\varphi_k \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} D^\alpha\varphi$ в G (т.е. если $\sup\limits_{x\in G}|D^\alpha\varphi_k(x)-D^\alpha\varphi(x)|\underset{k\to\infty}{\to}0$)

② $\exists$ замкнутое ограниченное мн-во $M\subset G$: $\forall k$ $\mathrm{supp}\,\varphi_k\subset M$

Обозн. $\varphi_k\underset{k\to\infty}{\to}\varphi$ или $\varphi=\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k$

Опр. Слово „функционал" тождественно словосочетанию „отображение во множество чисел".

Обозн. Значение функционала F на пробной ф-ции φ:

$F(\varphi)$ или (F,φ)

Опр. Ф-ал F, определённый на $\mathcal{D}(G)$, наз-ся линейным,

если $\forall\varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{D}(G)$ и $\forall a,b\in C$ имеет место равенство

$F(a\varphi_1+b\varphi_2)=aF(\varphi_1)+bF(\varphi_2)$

Опр. Ф-ал F, опред. на $\mathcal{D}(G)$, наз-ся непрерывным, если

из того, что $\varphi_k\underset{k\to\infty}{\to}\varphi$, $\varphi_k\in\mathcal{D}(G)$, $\varphi\in\mathcal{D}(G)$, следует, что

$F(\varphi_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} F(\varphi)$

Замечание (эвристическое соображение):
Если лин. ф-ал определён во всём пр-ве $\mathcal{D}(G)$, то он непрерывен.

Опр. Лин. непр. ф-ал, определённый на $\mathcal{D}(G)$, наз-ся обобщённой ф-цией в $G \subset \mathbb{R}^n$

Обозначение. Совокупность всех обобщ. ф-ций в $G \subset \mathbb{R}^n$ обозн. $\mathcal{D}'(G)$

Примеры обобщ. ф-ций:

(1) Регулярная обобщ. ф-ия

Опр. Говорят, что ф-ия $f: G \to \mathbb{C}$ принадлежит пр-ву $L_{1,loc}(G)$, если $\forall x \in G \ \exists U$-окр. x: $\int\limits_{G\cap U} |f(x)|\,dx$ сходится.

Например: $f(x) \equiv 1 \in L_{1,loc}(\mathbb{R})$
$f(x) = \ln x \in L_{1,loc}(0,+\infty)$

По каждой ф-ции $f \in L_{1,loc}(G)$ построим обобщ. ф-ию $\{f\}$ по следующему правилу: $(\{f\},\varphi) = \int\limits_G f(x)\varphi(x)\,dx$

Упр. Доказать, что этот интеграл сходится

(2) (Дельта-функция Дирака)
$\delta(\varphi) = \varphi(0)$

Докажем линейность:
$\delta(a\varphi_1 + b\varphi_2) = (a\varphi_1 + b\varphi_2)(0) = a\varphi_1(0) + b\varphi_2(0) = a\delta(\varphi_1) + b\cdot\delta(\varphi_2)$

Докажем непр:
$\delta(\varphi_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \delta(\varphi) \longleftrightarrow \delta(\varphi_k - \varphi) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

$|\delta(\varphi_k - \varphi)| = |(\varphi_k - \varphi)(0)| = |\varphi_k(0) - \varphi(0)| \le \sup\limits_{x\in G} |\varphi_k(x) - \varphi(x)| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Замеч. δ - ф-ия не является регулярной ф-ией!, т.е. не сущ. „обычной" ф-ии $f(x) \in L_{1,loc}(G)$ такой, что $\forall \varphi \in \mathcal{D}(G)$ выполняется равенство $(\delta, \varphi) = \int\limits_G f(x)\varphi(x)dx$

$$(3)\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi\right) = v.p. \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to \infty}} \left(\int\limits_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right)$$

Замечание. $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ не является регулярной ф-ией

Упр. Доказать, что $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ справедливо равенство

$$v.p. = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = v.p. \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx$$

$$(4)\left(\frac{1}{x \pm i0}, \varphi\right) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon} dx$$

Т-ма (Ф-лы Сохоцкого):

$$\frac{1}{x \pm i0} = \mp i\pi \delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}$$

Док-во:

$$\left(\frac{1}{x \pm i0}, \varphi\right) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon} dx = \left\langle \begin{matrix} \varphi \text{ - прост}\text{ая, тогда} \\ \varphi \equiv 0 \text{ при } x > |R| \end{matrix} \right\rangle =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi(x) - \varphi(0) + \varphi(0)}{x \pm i\varepsilon} dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \Bigg(\underbrace{\int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x \pm i\varepsilon} dx}_{= I_1} +$$

$$+ \underbrace{\int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi(0)(x \mp i\varepsilon)}{(x \pm i\varepsilon)(x \mp i\varepsilon)} dx}_{= I_2} \Bigg)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} I_1 \overset{?}{=} \int\limits_{-R}^{R} \left(\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x \pm i\varepsilon} \right) dx = \int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx =$$

$$\forall a > 0 \quad = \int\limits_{-(R+a)}^{R+a} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx = \int\limits_{-R-a}^{-R} + \int\limits_{-R}^{R} + \int\limits_{R}^{R+a}$$

- нечётная ф-ия, т.к. $\varphi(x)$ при $|x| > R \equiv 0$, $\ominus \frac{\varphi(0)}{x}$ - нечётная, симметричный промежуток

$$\Rightarrow \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi\right)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} I_2 = \varphi(0)\left(\underbrace{\lim_{\varepsilon\to0+}\int_{-R}^{R}\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\,dx}_{\substack{\shortparallel\\ 0,\ \text{т.к.}\\ \text{функция нечётная}}} \mp i \lim_{\varepsilon\to0+}\int_{-R}^{R}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\,dx\right) =$$

$$= \varphi(0)\lim_{\varepsilon\to0+} \mp i \int_{-R}^{R} \frac{d\frac{x}{\varepsilon}}{\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2+1} = \mp i\varphi(0)\underbrace{\lim_{\varepsilon\to0+} \operatorname{arctg}\frac{x}{\varepsilon}\Big|_{-R}^{R}}_{\pi} =$$

$$= \mp i\pi\varphi(0) = \mp i\pi\delta(\varphi)$$

Окончательно:

$$\left(\frac{1}{x\pm i0}, \varphi\right) = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi\right) \mp i\pi(\delta, \varphi)$$

Для завершения док-ва обоснуем „?".

Для этого достаточно указать интегрируемую мажоранту $\Psi(x)$ для ф-ии $\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x\pm i\varepsilon}$: $\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x\pm i\varepsilon}\right| \le \Psi(x)$ и $\int_{-R}^{R}\Psi(x)\,dx < +\infty$. $\left|\frac{1}{x\pm i\varepsilon}\right| < \left|\frac{1}{x}\right| \to \left|\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x\pm i\varepsilon}\right| < \left|\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\right|$

Положим $\Psi(x) = \begin{cases} \left|\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\right|, & x\neq 0 \\ |\varphi'(0)|, & x=0\end{cases}$

Ф-ия Ψ непрерывна, а значит $\int_{-R}^{R}\Psi(x)\,dx < +\infty$ и

$$\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x\pm i\varepsilon}\right| \le \Psi(x)\ \forall x$$

4.2 Сходимость обобщённых ф-ий. Дельта-образные последовательности.

Наводящие соображения: $G \subset R^n$, $f_1, \dots, f_k, \dots \in L_{1,loc}(G)$

и $f_k(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x)$ в $L_{1,loc}(G)$, тогда $(\{f_k\}, \varphi) = \int_B f_k(x)\varphi(x)dx \to$

$$\xrightarrow{\text{переходим к пределу}} \int_G f(x)\cdot\varphi(x)\,dx = (\{f\}, \varphi)$$

Опред. Пусть $G \subset R^n$, $F_1, \dots, F_k, \dots \in \mathcal{D}'(G)$ и $F \in \mathcal{D}'(G)$

Говорят, что $F_k \xrightarrow[k\to\infty]{} F$, если $\forall \varphi \in \mathcal{D}(G)$ $(F_k, \varphi) \to (F, \varphi)$.

Обозн. $F_k \xrightarrow[k\to\infty]{} F$, $F = \lim\limits_{k\to\infty} F_k$

Пример: $\left\{\frac{1}{x \pm i\varepsilon}\right\} \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} \frac{1}{x \pm i0}$

Опр (δ-образная посл-сть)

Говорят, что послед-сть ф-ций $h_1, \dots h_k, \dots$ определённых в R^n, образует δ-образную посл-ть, если

(1) $\forall k \;\; h_k(x) \geqslant 0 \;\; \forall x \in R^n$

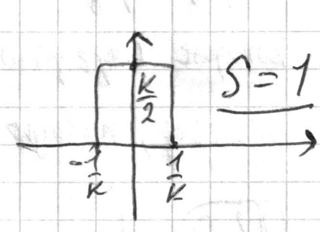
(2) $\int_{R^n} h_k(x)\,dx = 1 \;\; \forall k$

(3) $\forall k \;\; \exists \varepsilon_k > 0 : \forall x : |x| \geqslant \varepsilon_k \;\; h_k(x) = 0$ и $\varepsilon_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Лекция 15 (10.12.19)

Пример 1: $n = 1$

$$h_k(x) = \begin{cases} k/2, & |x| < \frac{1}{k} \\ 0, & |x| \geqslant \frac{1}{k} \end{cases} \qquad \varepsilon_k = \frac{1}{k}$$



это δ-обр. посл-ть

2: $n =$ любое

$$h_k(x) = \frac{\omega_{0,\frac{1}{k}}(x)}{\int_{R^n} \omega_{0,\frac{1}{k}}(y)\,dy} \text{ — нормирование}$$

Просто ф-ия $\omega_{0,\frac{1}{k}}$ не явл. δ-посл, а нормированная является

Напоминание из матанализа:

Вторая теорема о среднем:

Пусть B - шар в R^n; $f: B \to R$ - непр., $g: B \to R$ - неотриц.

Тогда $\exists x_0 \in B: \int\limits_B f(x) g(x)\, dx = f(x_0) \int\limits_B g(x) dx$

Теорема (о сходимости δ-образной последов.)

Пусть $h_1, .., h_k$ - δ-образная последов. в R^n. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} \{h_k\} = \delta(x)$

Док-во:

$$\left(\lim_{k\to\infty}\{h_k\}, \varphi\right) \overset{\text{опр.}}{=} \lim_{k\to\infty}\left(\{h_k\}, \varphi\right) \overset{\text{опр}}{=} \lim_{k\to\infty} \int\limits_{R^n} h_k(x)\varphi(x) dx =$$

$= \langle$ ф-ия h_k зануляется вне шара ε_k, есть смысл интегрировать не по R^n, а по $|x| \le \varepsilon_k \rangle =$

$$= \lim_{k\to\infty} \int\limits_{|x|\le\varepsilon_k} \underset{\text{неотриц.}}{h_k(x)}\, \underset{\text{непр}}{\varphi(x)}\, dx \overset{\text{2-я т.о среднем}}{=} \lim_{k\to\infty} \varphi(x_0) \underbrace{\int\limits_{|x|\le\varepsilon_k} h_k(x)\, dx}_{1} =$$

$\exists x_0 \in R^n: |x_0| \le \varepsilon_k$ ← лежит в шаре

$$= \lim_{k\to\infty} \varphi(x_0) \overset{\text{Непр.}}{=} \varphi\left(\lim_{k\to\infty} x_0\right) = \varphi(0) = \left(\delta(x), \varphi(x)\right) \blacksquare$$

Замечание. Физически δ-ф-ию в силу этой теоремы интерпретируют как плотность распределения массы такого тела, которое сосредоточено в одной точке $x=0$ и имеет общую массу, равную 1.

(4.3) Линейная замена переменных в одномерной обобщ. ф-ии.

Наводящие соображения:

Пусть $f \in L_{1,loc}(R)$. Тогда $\left(\{f(ax+b)\}, \varphi\right) =$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(ax+b)\varphi(x) dx = \langle y = ax+b \rangle =$$

$$= \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)\varphi\left(\frac{y-b}{a}\right)\frac{dy}{a}, & a>0 \\ \int\limits_{+\infty}^{-\infty} f(y)\varphi\left(\frac{y-b}{a}\right)\cdot\frac{dy}{a}, & a<0 \end{cases} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)\cdot\frac{\varphi\left(\frac{y-b}{a}\right)}{|a|}\cdot dy =$$

$$= \left(\{f(y)\}, \frac{\varphi\left(\frac{y-b}{a}\right)}{|a|}\right)$$

Опр. Пусть $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ и $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$. Тогда $(F(ax+b), \varphi(x)) =$
$$= \left(F(y), \frac{\varphi\left(\frac{y-b}{a}\right)}{|a|}\right).$$

Пример 1: $\delta(-x) = \delta(x)$

В самом деле: $(\delta(-x), \varphi(x)) \overset{\text{опр}}{=} \left(\delta(y), \frac{\varphi\left(\frac{y-0}{-1}\right)}{|-1|}\right) =$
$= (\delta(-y), \varphi(y)) = \varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x))$

4.4 Умножение обобщ. ф-ций

Навод. сообр.:

Пусть $f \in L_{1,loc}(G)$, $a(x) \in C^\infty(G)$, $\varphi \in \mathcal{D}(G)$. Тогда
$$(\{a(x)f(x)\}, \varphi(x)) = \int\limits_G a(x)\cdot f(x)\cdot\varphi(x)\,dx = (\{f(x)\}, a(x)\varphi(x))$$

Опр. Пусть $F \in \mathcal{D}'(G)$, $a(x) \in C^\infty(G)$. Тогда
$$(a(x)F(x), \varphi(x)) = (F(x), a(x)\varphi(x))$$

Примеры:

(1) $a(x)\cdot\delta(x) = a(0)\cdot\delta(x)$

В самом деле, $(a(x)\delta(x), \varphi(x)) = (\delta(x), a(x)\varphi(x)) =$
$= a(0)\varphi(0) = a(0)(\delta(x), \varphi(x)) = (a(0)\delta(x), \varphi(x))$

(2) $(\{x\mathcal{P}\frac{1}{x}\}, \varphi(x)) = (\mathcal{P}\frac{1}{x}, x\varphi(x)) \overset{\text{опр}}{=} \text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\varphi(x)}{x}dx =$
$= \langle$нет особых точек$\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} 1\cdot\varphi(x)\,dx = (\{1\}, \varphi(x))$

Замечание - предостережение!

Нельзя определить операцию умножения любых двух обобщ. ф-ий так, чтобы она обладала свойствами:

(i) она коммутативна

(ii) она ассоциативна

(iii) она совпадает с введённой выше операцией умножения на бесконечно дифф. ф-ию

От противного: Допустим, такая операция сущ. Тогда

$$(x\delta(x))\cdot \mathcal{P}\frac{1}{x} = \{0\}\mathcal{P}\frac{1}{x} = \{0\}$$

$$\overset{\text{коммут.}}{\|}\qquad\qquad\qquad \times\ \text{противоречие}$$

$$(\delta(x)\cdot x)\cdot\mathcal{P}\frac{1}{x} \overset{\text{ассоц.}}{=} \delta(x)(x\mathcal{P}\frac{1}{x}) = \delta(x)$$

(4.5) Дифф.-ие обобщ. ф-ий.

Теорема о связи классических и обобщённых производных.

Наводящие соobр.:

Пусть $f: R\to R$ - непр. дифф. ф-ия, $\varphi\in\mathcal{D}(R)$. Тогда

$$(\{f'\},\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx \overset{\text{по частям}}{=} f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} -$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = -(\{f\},\varphi')$$

Опр. Пусть $F\in\mathcal{D}'(G)$, $G\subset R^n$, α-мультииндекс.

$$(\mathcal{D}^\alpha F,\varphi) = (-1)^{|\alpha|}(F,\mathcal{D}^\alpha\varphi)$$

Замечание: Любая обобщ. ф-ия имеет производную любого порядка, т. е. явл. бесконечно дифф.

Пример 1: $(\delta',\varphi) \overset{\text{опр}}{=} -(\delta,\varphi') = -\varphi'(0)$

Пример 2: Пусть $H(x) = \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$.

Тогда $\{H\}' = \delta(x)$

В самом деле: $(\{H\}', \varphi) \overset{\text{опр.}}{=} -(\{H\}, \varphi') \overset{\text{опр.}}{=}$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)\,dx = -\varphi(x)\Big|_0^{\infty} =$$

$$= \varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x))$$

Напоминание из матана:

$f(x+0) = \lim\limits_{h\to 0+} f(x+h)$ – предел справа

$[f]_x = f(x+0) - f(x-0)$ – скачок ф-ии в точке x

Теорема (о связи классической и обобщ. производной)

Пусть f – кус.-гл. ф-ия в R. Тогда $\{f\}' = \{f'\} +$

$$+ \sum_k [f]_{x_k}\, \delta(x - x_k)$$

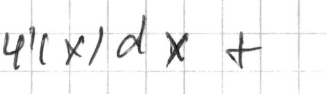
Док-во:

Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(R)$. Тогда $(\{f'\}, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx =$

$$= \sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(x)\varphi(x)\,dx \overset{\text{по частям}}{=} \sum_k \Big[f(x)\varphi(x)\Big|_{x=x_k}^{x=x_{k+1}} -$$

x_k – точки разрыва и излома

$$- \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\varphi'(x)\,dx \Big] = -\sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\varphi'(x)\,dx +$$



$$+ \sum_k \big[f(x_{k+1}-0)\varphi(x_{k+1}) - f(x_k+0)\varphi(x_k) \big] =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\varphi'(x)\,dx + \sum_k \ldots$$