

6.5 Многочлены Лежандра: производящая функция и рекуррентные соотношения

Опр $w(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \quad (*)$

↑
производящая функция
многочленов Лежандра

↑
коэффициенты разложения
 $w(t, x)$ в ряд Тейлора,
в котором через некоторые
время мы расположим
многочлены Лежандра,
стандартизованные и
помноженные на производящую
функцию

$$(k+1) P_{k+1}(x) - (2k+1)x P_k(x) + k P_{k-1}(x) = 0 \quad (1) \quad \forall k \geq 1$$

Это трехчленная рекуррентная зависимость. С ее помощью мы докажем следующую лемму
Лемма $\forall n$ коэффициент $P_n(x)$ в разложении (*) является многочленом степени n с наименьшими старшими коэффициентами.

Если мы дифференцируем $w(t, x)$ по x и получим
 $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{t}{1-2tx+t^2} w(t, x)$, т.е. $(1-2tx+t^2) \frac{\partial w}{\partial x} - tw = 0$

— Лекция 9, которая состоится 25 марта 2020 —

Подставим разложение (*) в последнее равенство:

$$(1-2tx+t^2) \sum_{k=n+1}^{\infty} P'_k(x) t^k - t \sum_{k=n+1}^{\infty} P_k(x) t^k = 0$$

Приведем соотношение при t^k :

$$t^k \mid P'_k(x) - 2x P'_{k-1}(x) + P'_{k-2}(x) - P_{k-1}(x) = 0$$

$$P'_k(x) - 2x P'_{k-1}(x) + P'_{k-2}(x) - P_{k-1}(x) = 0 \quad (2) \quad \forall k \geq 2$$

Преобразуем (2) к более симметричному виду.

$$\frac{d}{dx} (1) \Rightarrow (k+1)P'_{k+1} - (2k+1)P_k - (2k+1)xP'_k + kP'_{k-1} = 0 \quad \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right|$$

$$b(2) \quad k \rightarrow k+1 \Rightarrow P'_{k+1} - P_k - 2xP'_k + P'_{k-1} = 0 \quad \left| \begin{array}{c} - \\ k+1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} - \\ k \end{array} \right|$$

$$[-(2k+1) + (k+1)]P_k - x[(2k+1) - 2(k+1)]P'_k + [k - (k+1)]P'_{k-1} = 0$$

$$-kP_k + xP'_k - P'_{k-1} = 0 \quad (3)$$

$$(k+1-k)P'_{k+1} - [(2k+1)-k]P_k - x[(2k+1)-2k]P'_k = 0$$

$$P'_{k+1} - (k+1)P_k - xP'_k = 0 \quad (4)$$

$$\text{Сложим (3) и (4)} \Rightarrow P'_{k+1} - (2k+1)P_k - P'_{k-1} = 0$$

$$\text{т.е. } (2k+1)P_k = P'_{k+1} - P'_{k-1} \quad (5)$$

Это второе рекуррентное соотношение для коэффициентов Лежандра.