## 6.6 Многочлены Лежандра: дифференциальное уравнение и соотношения ортогональности.

В п. 6.5 мы вывели несколько рекуррентных соотношений, в том числе

$$-kP_k + xP_k' - P_{k-1}' = 0 \qquad (3)$$

$$P_{k+1}' - (k+1)P_k - xP_k' = 0 \qquad (4).$$

Формулу (3) умножим на $-1$ и сделаем замену $n=k$; в формуле (4) сделаем замену $n=k+1$. Получим

$$\begin{array}{rl|l} & nP_n - xP_n' + P_{n-1}' = 0 & \cdot x \\ + & P_n' - nP_{n-1} - xP_{n-1}' = 0 & \cdot 1 \\ \hline & (1-x^2)P_n' + xnP_n - nP_{n-1} = 0 & \frac{d}{dx} \end{array}$$

$$\left[(1-x^2)P_n'\right]' + nP_n + \cancel{xnP_n'} - n\underset{\substack{\| \\ \cancel{xP_n'} - nP_n}}{P_{n-1}'} = 0$$

формула (3)

Значит,

$$\left[(1-x^2)P_n'\right]' + (n+n^2)P_n = 0,$$

т.е. $y(x) = P_n(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left[(1-x^2)y'(x)\right]' + n(n+1)y(x) = 0.$$

Чтобы вывести соотношения ортогональности, запишем диф-ые ур-ния, которые удовлетворяют $P_n(x)$ и $P_m(x)$:

$$\left.\begin{aligned}&\left[(1-x^2)P_n'\right]' + n(n+1)P_n = 0\\ &\left[(1-x^2)P_m'\right]' + m(m+1)P_m = 0\end{aligned}\right|\begin{aligned}&P_m\\ -\ &P_n\end{aligned}$$

$$\underbrace{\left[(1-x^2)P_n'\right]'P_m - \left[(1-x^2)P_m'\right]P_n}_{\overset{\parallel\,\text{обоз}}{A}} + \underbrace{\left[n(n+1) \mp m(m+1)\right]}_{\overset{\parallel\,\text{обоз}}{B}} P_nP_m = 0 \qquad (*)$$

Преобразуем ~~Упростим~~ $A$ и $B$:

$$\left[(1-x^2)(P_n'P_m - P_nP_m')\right]' =$$

$$= \left[\underbrace{(1-x^2)P_n'}P_m - \underbrace{(1-x^2)P_m'}P_n\right]' =$$

$$= \left[(1-x^2)P_n'\right]'P_m + \cancel{(1-x^2)P_n'P_m'} -$$

$$- \left[(1-x^2)P_m'\right]'P_n - \cancel{(1-x^2)P_m'P_n'} = A;$$

$$B = n^2 + n \mp m^2 \mp m = (n^2 - m^2) + (n - m) =$$

$$= (n-m)(n+m) + (n-m) = (n-m)(n+m+1).$$

Проинтегрировав $(*)$ по $[-1,1]$, получим

$$\underbrace{\int_{-1}^{1}\left[(1-x^2)(P_n'P_m - P_nP_m')\right]'dx}_{\parallel} + (n-m)(n+m+1)\int_{-1}^{1}P_nP_m\,dx = 0$$

$$(1-x^2)(P_n'P_m - P_nP_m')\Big|_{-1}^{1} = 0$$

Значит, если $m \neq n$, то $\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx = 0$

т.е. $P_n$ и $P_m$ ортогональны на $[-1,1]$ с весом $h(x) \equiv 1$.

Чтобы найти норму $P_n(x)$, вычислим $\|P_n\|^2 = (P_n, P_n) = \int\limits_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx$. с помощью трёхчленной рекуррентной формулы (1) из 6.5.

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} = 0. \qquad \Big| \, (2n-1)P_{n-1}$$

Сделаем в ней замену: будем писать $n$ вместо $n+1$. Получим

$$nP_n - (2n-1)xP_{n-1} + (n-1)P_{n-2} = 0 \qquad \Big| \, (2n+1)P_n$$

---

$$(n+1)(2n-1)P_{n+1}P_{n-1} + n(2n-1)P_{n-1}^2 -$$

$$- n(2n+1)P_n^2 - (2n+1)(n-1)P_nP_{n-2} = 0$$

Теперь проинтегрируем по $[-1,1]$ и воспользуемся уже доказанной ортогональностью, т.е $\int\limits_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x) = 0$ при $m \neq n$:

$$\cancel{n}(2n-1)\int\limits_{-1}^{1} P_{n-1}^2\,dx - \cancel{n}(2n+1)\int\limits_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = 0.$$

$$\Rightarrow \int\limits_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{2n-1}{2n+1}\int\limits_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x)\,dx =$$

$\forall n \geq 2$

$$= \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{2n-3}{2n-1} \cdot \int\limits_{-1}^{1} P_{n-2}^2(x)\,dx = \ldots =$$

$$= \frac{\cancel{2n-1}}{2n+1}\cdot\frac{\cancel{2n-3}}{\cancel{2n-1}}\cdot\ldots\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{5}}\underbrace{\int_{-1}^{1} P_1^2(x)\,dx}_{=\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{\cancel{3}}} = \frac{2}{2n+1}$$

<u>Задача</u> для самостоятельного решения: проверить равенство $\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}$ для $n = 0$ и $1$ прямым вычислением (т.е. без использования трёхчленной рекуррентной формулы).

<u>Итог:</u> $\int_{-1}^{+1} P_n(x)P_m(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\,\delta_{nm}$ —

– соотношение ортогональности для многочленов Лежандра, стандартизованных с помощью производящей функции.

Тем самым мы закончили реализовывать идею, высказанную в п. 6.5 о том, что коэффициенты в разложении $w(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$ являются ортогональными многочленами на $[-1,1]$ с весом $1$, т.е. заслуживают названия мн-нов Лежандра, стандартизованных с помощью производящей функции.