

6.7 Многочлены Лежандра: формулы
Родрига и теорема о разложении
функции в ряд по многочленам
Лежандра

Теорема (формулы Родрига) $\forall n \geq 0$
справедливо равенство

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n], \quad (*)$$

где P_n — многочлены Лежандра,
стандартизованные с помощью усло-
вий функции.

Идея доказательства: Обозначим
правую часть равенства (*) через Q_n .

Затем докажем, что Q_n — многочлен
степени n с положительными старшими
коэффициентами и $\int_{-1}^1 Q_n(x) Q_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}$,
т.е. Q_n ортогональны на $[-1, 1]$ и несе-
ют нулевую функцию, что P_n . Поскольку орто-
гональные многочлены определяются

своими всеми свойствами, то $P_n = Q_n$,
т.е. q -ая (*) доказана.

$$\text{То, что } Q_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n]$$

является многочленом степени n
с положительными старшими коэффициентами
— очевидно.

Изучим $\int_{-1}^1 Q_n(x) Q_m(x) dx$; его
вычисление мы опустим.

Теорема (о разложении функции в ряд по
многочленам Лежандра). Пусть $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ —
непрерывно дифференцируемая функция. Тогда
 $\forall x \in [-1, 1]$ справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x), \quad (**)$$

где P_n — многочлен Лежандра, сгруппиро-
ванный с помощью производящей функции, а

$$c_n = \frac{(f, P_n)}{(P_n, P_n)} = (n + \frac{1}{2}) \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx.$$

Идея доказательства: Построим ортонор-
мальная система $\frac{P_0}{\|P_0\|}, \frac{P_1(x)}{\|P_1\|}, \dots, \frac{P_n(x)}{\|P_n\|}, \dots$
в $L_2[-1, 1]$, то любую функцию

$f \in L_2[-1, 1]$ можно представить в явном виде
 рядом в виде ряда $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{P_n(x)}{\|P_n(x)\|}$, где
 λ_n — коэффициенты Фурье функции f относи-
 тельно ортонормированной системы $\frac{P_0}{\|P_0\|}, \frac{P_1}{\|P_1\|}, \dots, \frac{P_n}{\|P_n\|}, \dots$

Поэтому $\lambda_n \frac{1}{\|P_n\|} = (f, \frac{P_n}{\|P_n\|}) \frac{1}{\|P_n\|} = \frac{(f, P_n)}{\|P_n\|^2} = c_n$,
 где $c_n = \frac{(f, P_n)}{(P_n, P_n)}$. Поэтому г-во $(**)$

в $L_2[-1, 1]$ верна.

Доказывать ~~это~~ равенство $(**)$
 поточнее не будем. ~~Это~~ Это дело
 более тонкое и изощренное. Вероятно
 как мы доказывали поточечную
 сходимость ряда Фурье с помощью
 ядра Дирихле в курсе "Ряды Фурье".
 Но в современной г-во рав-ва $(**)$
 есть в полном объеме.