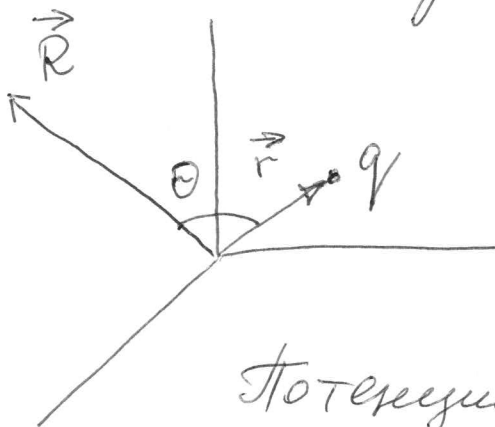


6.8 Мультиполярное разложение кулоновского потенциала



Пусть ~~R~~ $R = |\vec{R}|$,
 $r = |\vec{r}|$, θ - угол между
 векторами $\vec{r}$ и $\vec{R}$, и $R > r$.

Потенциал электрического поля,
 создаваемого в точке $\vec{R}$ зарядом q ,
 измеренным в точке $\vec{r}$, задается
 формулой

$$\Phi = \frac{q}{|\vec{R} - \vec{r}|} = \frac{q}{\sqrt{R^2 - 2Rr \cos \theta + r^2}} = \frac{q}{R} \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \frac{r}{R} \cos \theta + \left(\frac{r}{R}\right)^2}}$$

$$= \frac{q}{R} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left(\frac{r}{R}\right)^n.$$

↑
 произведение
 P_n -из Legendre
 Лежандра

Если $R > r$, то этот ряд
 сходится абсолютно, т.е.
 можно доказать, что $\forall x \in [-1, 1]$

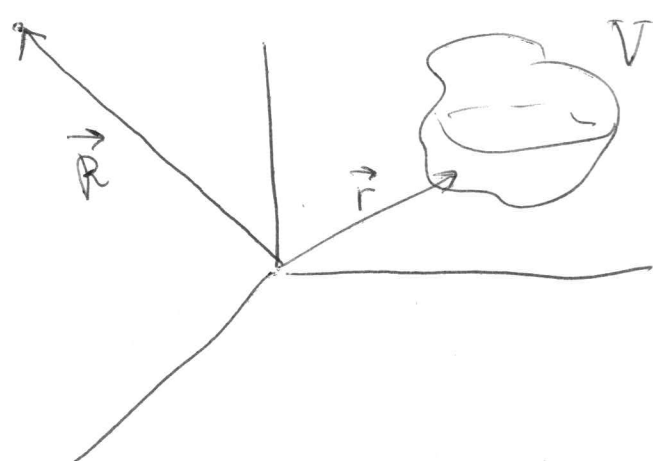
$$|P_n(x)| \leq 1, \quad (*)$$

а значит $\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(\cos \theta)| \left(\frac{r}{R}\right)^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n < \infty$

Нер-во (*) доказывается напрямую
 и сам это г-во очевидно, и
 не нужно его доказывать
 не нужно. Но в литературе оно есть

↑
 геометрически
 очевидно

Более сложная ситуация - заряд
"размазан" в некоторой области $V \subset \mathbb{R}^3$
с плотностью $\rho(\vec{r})$. Наблюдатель
находится в точке $\vec{R}$, причем $R > r$.



Тогда потенциал
задается формулой

$$\Phi(\vec{R}) = \iiint_V \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{R} - \vec{r}|} dV =$$

$$= \iiint_V \frac{\rho(\vec{r})}{R} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left(\frac{r}{R}\right)^n dV = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{\sigma_n}{R^{n+1}}}_{\text{асимптотическая}}, \text{ где}$$

$$\sigma_n = \iiint_V \rho(\vec{r}) P_n(\cos \theta) r^n dV.$$

Вспомогательное

$$P_0 = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}, \text{ следующие члены}$$

горящих для первых коэффициентов σ_n :

$$\sigma_0 = \iiint_V \rho(\vec{r}) dV - \text{полный заряд}$$

$$\sigma_1 = \iiint_V \rho(\vec{r}) r \cos \theta dV - \text{дипольный момент}$$

$$\sigma_2 = \iiint_V \rho(\vec{r}) r^2 \frac{3\cos^2 \theta - 1}{2} dV - \text{квадрупольный момент}$$

Замечание: 1) Все члены $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ в электрическом
2) Можно сказать, что P_n появляются у r -сильных полей