# §7. Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах.

## 7.1 Линейные операторы и их общие свойства

В этом пункте $H$ и $H_1$ обозначают гильбертовы пространства.

<u>Опр</u> Отображение $A: H \to H_1$ называется линейным ~~...~~ оператором, если $\forall x, y \in H$ и $\forall \alpha, \beta$ - числа справедливо равенство
$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y).$$

<u>Замечания</u>: 1) Если аргумент линейного оператора „простой", то пишут $Ax$ вместо $A(x)$.

2) Вместо „линейный оператор" я иногда буду говорить „оператор"; это не приведёт к недоразумениям, поскольку мы не будем рассматривать нелинейные операторы.

<u>Примеры линейных операторов:</u>

(1) [Тождественный оператор $I$:]

Определим отображение $I: H \to H$ с помощью равенства $Ix = x$ для всех $x \in H$. Этот оператор ~~...~~ называется тождественным. Проверка его линейности очень проста:
$$I(\alpha x + \beta y) \overset{\text{опр}}{=} \alpha x + \beta y = \alpha I x + \beta I y.$$

(2) [Нулевой оператор $O$:] Определим отображение $O: H \to H_1$ с помощью равенства $Ox = 0 \in H_1 \quad \forall x \in H$. Оператор $O$ называется нулевым.

<u>Упражнение</u>: Проверьте, что нулевой оператор является линейным.

(3) [Конечномерный оператор и его матрица:] Пусть $x_1, \dots, x_n$ – ортонормированный базис в $H$ (в частности, $\dim H = n < +\infty$) и пусть $y_1, \dots, y_m$ – ортонормированный базис в $H_1$ (в частности, $\dim H_1 = m < +\infty$). Пусть $A: H \to H_1$ – линейный оператор.

Тогда $\forall x \in H \quad \exists! \ \lambda_1, \dots, \lambda_n$ – числа такие, что $x = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$ и $Ax = A\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \underset{H_1}{(Ax_j)}$. Т.к. $Ax_j \in H_1$, то $\exists! \ a_{kj}$ – числа такие, что $Ax_j = \sum\limits_{k=1}^{m} a_{kj} y_k$. Следовательно,

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left[\sum_{k=1}^{m} a_{kj} y_k\right] = \sum_{k=1}^{m} \underbrace{\left[\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \lambda_j\right]}_{\text{обоз } \mu_k} y_k = \sum_{k=1}^{m} \mu_k y_k = y.$$

Значит, $A: H \to H_1$ порождает отображение коэффициентов разложения векторов $x = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$ и $Ax = y = \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k y_k$ по базисам: $\mu_k = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj} \lambda_j$. Это равенство можно записать в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{Это матрица оператора } A \text{ в базисах } x_1,\dots,x_n \text{ и } y_1,\dots,y_m.} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

(4) [Оператор ортогонального проектирования:]
Пусть $S$ - замкнутое подпространство в $H$. Из пункта 5.5 знаем, что $\forall x \in H$ $\exists! \, y \in S$, который является ортогональной проекцией вектора $x$ на $S$. Зададим оператор $P: H \to S$ ортогонального проектирования на $S$ с помощью формулы $Px = y$.

Пусть $x_1, x_2 \in H$. Знаем, что $\forall j = 1,2$ $\exists! \, y_j \in S$ и $\exists! \, z_j \in S^\perp$ такие, что $x_j = y_j + z_j$, при этом $Px_j = y_j$. Знаем, что $S$ и $S^\perp$ являются линейными подпространствами в $H$. Поэтому $\forall \alpha_1, \alpha_2$ - числа имеем

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 (y_1 + z_1) + \alpha_2 (y_2 + z_2) =$$

$$= \underbrace{(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)}_{\in S} + \underbrace{(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2)}_{\in S^\perp}$$ и такое разложение единственно!

Поэтому $P(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 =$
$= \alpha_1 P x_1 + \alpha_2 P x_2$ что и доказывает линейность оператора $P$.

(5) [Интегральный оператор:]

Интегральным называется оператор, который каждой функции $x(t) \in L_2[a,b]$ сопоставляет новую функцию $y$ $L_2[a,b]$ по правилу

$$(Ax)(t) = \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds,$$

где $K$ - фиксированная функция двух переменных (например, непрерывная), которая называется ядром оператора $A$.

Линейность интегрального оператора очевидна ввиду линейности интеграла:

$$\big(A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)\big)(t) = \int_a^b K(t,s)\big(\alpha_1 x_1(s) + \alpha_2 x_2(s)\big)ds =$$

$$= \alpha_1 \int_a^b K(t,s)\,x_1(s)\,ds + \alpha_2 \int_a^b K(t,s)\,x_2(s)\,ds =$$

$$= \alpha_1 (Ax_1)(t) + \alpha_2 (Ax_2)(t).$$

Интегральные операторы мы будем более детально изучать в § 8 нашего курса.

# Общие свойства линейных операторов

**Опр.** Пусть $A: H \to H_1$ и $B: H \to H_1$ — линейные операторы $\forall \alpha, \beta$ — числа зададим новое отображение $\alpha A + \beta B : H \to H_1$ формулой

$$(\alpha A + \beta B)x \overset{\text{опр.}}{=} \alpha(Ax) + \beta(Bx).$$

(1) $\forall \alpha, \beta$ — числа отображение $\alpha A + \beta B$ является линейным.

Д-во: $\forall s, t$ — числа и $\forall x, y \in H$ имеем

$$(\alpha A + \beta B)(sx + ty) = \alpha A(sx + ty) + \beta B(sx + ty) =$$

$$= \alpha(sAx + tAy) + \beta(sBx + tBy) =$$

$$= s(\alpha Ax + \beta Bx) + t(\alpha Ay + \beta By) =$$

$$= s(\alpha A + \beta B)x + t(\alpha A + \beta B)y$$

**Опр.** Пусть $A: H \to H_1$ и $B: H_1 \to H_2$ — линейные операторы. Зададим новое отображение $BA: H \to H_2$ формулой $(BA)x = B(Ax)$. $\forall x \in H$

Оно называется произведением (или суперпозицией) операторов $A$ и $B$.

(2) Отображение $BA: H \to H_2$ является линейным.

Д-во: $\forall x, y \in H$ и $\forall \alpha, \beta$ — числа имеем

$$(BA)(\alpha x + \beta y) = B\big(A(\alpha x + \beta y)\big) =$$

$$= B(\alpha Ax + \beta Ay) = \alpha\, \underline{B(Ax)} + \beta\, \underline{\underline{B(Ay)}} =$$

$$= \alpha\, \underline{(BA)x} + \beta\, \underline{\underline{(BA)y}}\,.$$

UTD.