

(7.10) Бра- и ке- векторы.

Бра- и ке- векторы - это формализм, позволяющий удобно работать с векторами и операторами.

Он был предложен впервые из основателей квантовой механики Польем Дираком и прочно утвердился в физической структуре. Мы изучаем его аж, а реально работать в этом формализме вы будете в квантовой механике.

В рамках этого формализма считают, что скалярное произведение линейно по второму аргументу. Более того, "кривое" (т.е. линейное по первому аргументу) скалярное произведение (x, y) записывают в унитарных системах в виде $\langle y | x \rangle$:

$$(x, y) = \langle y | x \rangle$$

(т.е. x обозначает тот аргумент, по которому линейно скалярное произведение хоть в одной, хоть в другой системе). Более того, скалярное произведение $\langle y | x \rangle$ естественно (или формально) разбивают на два самостоятельных слагаемых $\langle y |$ и $| x \rangle$, т.е. пишут

$$(x, y) = \langle y | x \rangle = \{ \langle y | \} \{ | x \rangle \}.$$

Опр. Символ $| x \rangle$ называют ке- векторами и отождествляют с векторами x некоторого гильбертова пространства H .

Опр. Символ $\langle y |$ называют бра- векторами и отождествляют с линейными непрерывными функциями на H , т.е. с векторами пространства H^* .

Замечание Название происходит от английского слова "скобка" = bracket.

Пример 1: Разложение тождественного оператора или правого сокращения. Пусть H - n -мерное урво, $\dim H = n$, $x_1, \dots, x_n$ - ортонормированный базис в H . Тогда $\sum_{k=1}^n |x_k\rangle\langle x_k| = I$ - тождественный оператор.

Решение будем записывать параллельно в "кривых" обозначениях и бракетных обозначениях

$$x = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k, \text{ где } \alpha_k = (x, x_k) - \text{коэф. Фурье}$$

$$\Rightarrow x = \sum_{k=1}^n (x, x_k) x_k$$

$$x = Ix$$

$$|x\rangle = \sum_{k=1}^n |x_k\rangle \alpha_k, \text{ где } \alpha_k = \langle x_k | x \rangle.$$

$$|x\rangle = \sum_{k=1}^n |x_k\rangle \langle x_k | x \rangle = \left\{ \sum_{k=1}^n |x_k\rangle \langle x_k| \right\} |x\rangle$$

$$\Rightarrow I = \sum_{k=1}^n |x_k\rangle \langle x_k|$$

Замечание Формулы сокращения её называют потому, что в правой знак суммирования опускают

$$\sum_{k=1}^n |x_k\rangle \langle x_k| = |x_k\rangle \langle x_k|$$

и можно доказать, что в бракетных выражениях $|x_k\rangle \langle x_k|$ можно опускать (т.е. "сокращать") поскольку оно соответствует тождественному оператору.

Пример 2: Нормированное гильбертово пространство.
 Пусть H - гильбертово у-во, $\dim H = n$, $x_1, \dots, x_n$ -
 собственные вектора оператора A , отвечающие
 собствен. значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (т.е. $\forall k \quad Ax_k = \lambda_k x_k$)
 причем $x_1, \dots, x_n$ являются ортонормиро-
 ванными базисом в H . Тогда

$$(A - \lambda I)^{-1} = \sum_{j=1}^n \frac{|x_j\rangle \langle x_j|}{\lambda_j - \lambda}$$

Решение состоит в том, что $\forall y \in H$ можно
 найти $x \in H$, который является решением
 ур-ния $(A - \lambda I)x = y$, т.е. $x = (A - \lambda I)^{-1}y$.

Решение будем записывать используя в
 "крючках" обозначения и в бра-кет обозначениях

$$x = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j, \text{ где } \alpha_j = (x, x_j)$$

$$y = \sum_{j=1}^n \beta_j x_j, \text{ где } \beta_j = (y, x_j)$$

$$Ax_j = \lambda_j x_j$$

$$Ax - \lambda x = y$$

$$A\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j\right) - \lambda \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j\right) = \sum_{j=1}^n \beta_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j x_j - \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda x_j = \sum_{j=1}^n \beta_j x_j$$

$$\alpha_j \lambda_j - \alpha_j \lambda = \beta_j$$

$$|x\rangle = \sum_{j=1}^n |x_j\rangle \alpha_j, \text{ где } \alpha_j = \langle x_j | x \rangle$$

$$|y\rangle = \sum_{j=1}^n |x_j\rangle \beta_j, \text{ где } \beta_j = \langle x_j | y \rangle$$

$$|x_j\rangle A = |x_j\rangle \lambda_j$$

$$|x\rangle A - |x\rangle \lambda = |y\rangle$$

$$\left(\sum_{j=1}^n |x_j\rangle \alpha_j\right) A - \sum_{j=1}^n |x_j\rangle \alpha_j \lambda =$$

$$= \sum_{j=1}^n |x_j\rangle \beta_j$$

$$\sum_{j=1}^n |x_j\rangle \alpha_j \lambda_j - \sum_{j=1}^n |x_j\rangle \alpha_j \lambda =$$

$$= \sum_{j=1}^n |x_j\rangle \beta_j$$

$$\alpha_j \lambda_j - \alpha_j \lambda = \beta_j$$

$$\alpha_j = \frac{\beta_j}{\lambda_j - \lambda} \quad \forall j$$

$$x = \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j}{\lambda_j - \lambda} x_j$$

$$x = \sum_{j=1}^n \frac{(y, x_j)}{\lambda_j - \lambda} x_j$$

$$\alpha_j = \frac{\beta_j}{\lambda_j - \lambda} \quad \forall j$$

$$|x\rangle = \sum_{j=1}^n |x_j\rangle \frac{\beta_j}{\lambda_j - \lambda}$$

$$|x\rangle = \sum_{j=1}^n |x_j\rangle \frac{\langle x_j | y \rangle}{\lambda_j - \lambda}$$

$$|x\rangle = \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{|x_j\rangle \langle x_j|}{\lambda_j - \lambda} \right\} |y\rangle$$

$$\text{Значит } (A - \lambda I)^{-1} = \sum_{j=1}^n \frac{|x_j\rangle \langle x_j|}{\lambda_j - \lambda}$$

Тем самым, мы видим, что
 бра- и ке- обозначения позволяют
 записать действие оператора $(A - \lambda I)^{-1}$
 формулой, которую мы не смогли
 удобно записать в "пределах"
 обозначений.