

(7.11) Оператор, сопряжённый к ограниченному
 Опр. Пусть H и H_1 гильбертовы пространства и
 $A: H \rightarrow H_1$ — линейный ограниченный оператор.

Фиксируем $x_0 \in H_1$ и построим линейную
 функционал $f: H \rightarrow \mathbb{C}$ по формуле

$$f(x) = (Ax, x_0) \quad \forall x \in H.$$

Этот функционал зависит линейно от линейности
 оператора A и линейности скалярного
 произведения по первому аргументу.

Следующее вычисление показывает, что он
 ещё и непрерывен:

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{|(Ax, x_0)|}{\|x\|} \leq$$

неравенство
 Коши-Буняковского

$$\leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\| \cdot \|x_0\|}{\|x\|} = \|A\| \cdot \|x_0\| < +\infty,$$

По теореме Рисса $\exists! x_1 \in H: f(x) = (x, x_1)$
 для всех $x \in H$.

Тем самым, возникшее уравнение (отобра-
 жение) $H_1 \rightarrow H$, которое к каждому $x_0 \in H_1$
 сопоставляет $x_1 \in H$. Будем писать

$x_1 = A^* x_0$ и называть A^* оператором,
 сопряжённым к A .

Замечание Если опустить рассуждения, обосновывающие корректность приведенного выше определения, то можно сказать, что A^* - это оператор, задаваемый равенством

$$(Ax, x_0) = f(x) = (x, A^*x_0). \quad (*)$$

Именно это определение (*) используется выше в курсе линейной алгебры.

Так же мы проверим, что если $x_1, \dots, x_n$ - ортонормированный базис в H и $y_1, \dots, y_m$ - ортонормированный базис в H_1 , (a_{jk}) - матрица оператора A в этих базисах, а (a_{jk}^*) - матрица оператора A^* в этих базисах, то

$$a_{kj}^* = \overline{a_{jk}}$$

$$\forall k = 1, \dots, n \quad \text{и} \quad \forall j = 1, \dots, m.$$

Т.е. из линейной алгебры мы знаем, что матрица сопряженного оператора получается из матрицы исходного оператора транспонированием и взятием комплексного сопряжения.

При изучении свойств сопряженного оператора нам будет полезно следующее утверждение:

Лемма-лемма: Если H -нормировано пространство и векторы $x, y \in H$ таковы, что $\forall z \in H$ выполняется равенство $(x, z) = (y, z)$, то $x = y$.

Д-во очень простое: $(x, z) = (y, z) \Leftrightarrow (x - y, z) = 0$. Подставляя это равенство беря $\forall z \in H$, то естественно выбрать себе $z = x - y$. Получим $(x - y, x - y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\|^2 = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$. Ч.Т.Д.

Замечание: Говорят, что лемма-лемма позволяет устанавливать равенство векторов "безкоординатным способом".

Присутствие и изучение свойств оператора, сопряженного к ограниченному. При этом будем предполагать, что H и H_1 - нормированные пространства, $A, B: H \rightarrow H_1$ - ограниченные операторы и α, β - числа.

(1) A^* является единственным ограниченным оператором, при этом $\|A^*\| \leq \|A\|$.

Д-во Пусть $x \in H$; $y_1, y_2 \in H_1$ - произвольные векторы. Тогда $(x, A^*(\alpha y_1 + \beta y_2)) \stackrel{\text{опр}}{=} (Ax, \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha (Ax, y_1) + \beta (Ax, y_2) \stackrel{\text{опр}}{=} \alpha (x, A^* y_1) + \beta \cancel{A} (x, A^* y_2) =$

$$= (x, \alpha A^* y_1) + (x, \beta A^* y_2) = (x, \alpha A^* y_1 + \beta A^* y_2).$$

Поскольку это справедливо $\forall x \in H$, то

$$A^*(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha A^* y_1 + \beta A^* y_2.$$

Поскольку последнее равенство выполняется $\forall y_1, y_2 \in H_1$ и $\forall$ чисел α, β , то A^* — линейный оператор.

Оценим норму оператора A^* :

$$\|(x, A^* y)\| = \sup |(Ax, y)| \leq \|Ax\| \cdot \|y\| \leq$$

↑
норм-во Коши-
Бундковского

$$\leq \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|.$$

↑
св-во нормы
оператора

Подставив сюда $x = A^* y$,
получим

$$\|A^* y\|^2 = (A^* y, A^* y) \leq \|A\| \cdot \|A^* y\| \cdot \|y\|.$$

Следовательно, $\|A^* y\| \leq \|A\| \cdot \|y\|.$

Значит, $\|A^*\| = \sup_{y \neq 0} \frac{\|A^* y\|}{\|y\|} \leq \sup_{y \neq 0} \frac{\|A\| \cdot \|y\|}{\|y\|} = \|A\|.$ УД

$$(2) (\alpha A + \beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^*.$$

Д-во. Пусть $x \in H$ и $y \in H_1$ — произвольные векторы. Тогда

$$\begin{aligned}
 (x, (\alpha A + \beta B)^* y) &\stackrel{\text{оп}}{=} ((\alpha A + \beta B)x, y) = \\
 &= (\alpha Ax + \beta Bx, y) = \alpha (Ax, y) + \beta (Bx, y) \stackrel{\text{оп}}{=} \\
 &= \alpha (x, A^* y) + \beta (x, B^* y) = (x, \alpha A^* y + \beta B^* y) = \\
 &= (x, (\alpha A^* + \beta B^*) y).
 \end{aligned}$$

Поскольку это равенство выполняется $\forall x \in H$, то по линейности

$$(\alpha A + \beta B)^* y = (\alpha A^* + \beta B^*) y, \quad \forall y \in H.$$

Значит, $(\alpha A + \beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^*$. УТД.

$$(3) (A^*)^* = A.$$

Д-во. $A: H \rightarrow H_1$; $A^*: H_1 \rightarrow H$; $(A^*)^*: H \rightarrow H_1$.

Тогда $\forall x \in H_1$ и $\forall y \in H$ имеем

$$\begin{aligned}
 (x, (A^*)^* y) &\stackrel{\text{оп}}{=} (A^* x, y) = \overline{(y, A^* x)} \stackrel{\text{оп}}{=} \\
 &= \overline{(Ay, x)} = (x, Ay). \text{ По линейности}
 \end{aligned}$$

$$(A^*)^* y = Ay \quad \forall y \in H. \text{ Значит, } (A^*)^* = A. \text{ УТД}$$

$$(4) \|A^*\| = \|A\|.$$

Д-во $\|A^*\| \stackrel{(1)}{\leq} \|A\| \stackrel{(3)}{=} \|(A^*)^*\| \stackrel{(1)}{\leq} \|A^*\| \Rightarrow$
 $\Rightarrow \|A^*\| = \|A\|. \text{ УТД}$

(5) $I: H \rightarrow H$ — тождественный оператор. Тогда $I^* = I$.

Д-во: $\forall x, y \in H$ имеем $(x, I^* y) \stackrel{\text{оп}}{=} (Ix, y) = (x, y) = (x, Iy) \Rightarrow I^* y = Iy \quad \forall y \in H \Rightarrow I^* = I. \text{ УТД}$

$$(6) \quad (AB)^* = B^* A^*$$

$$\begin{aligned} \text{Д-во: } (x, (AB)^* y) &\stackrel{\text{оп}}{=} ((AB)x, y) = \\ &= (A(Bx), y) \stackrel{\text{оп}}{=} (Bx, A^* y) \stackrel{\text{оп}}{=} (x, B^*(A^* y)) = \\ &= (x, (B^* A^*) y). \quad \forall x \end{aligned}$$

По линейности, $(AB)^* y = (B^* A^*) y \quad \forall y$
 Значит, $(AB)^* = B^* A^*$.

Замечание: С-ва (1)-(6) известны в векторных пространствах операторов. Например, (6) — это правило вычисления сопряженного от произведения двух операторов.