

(7.12) Теорема о взаимосвязи сопряженного оператора и нахождения спектра

На семинарах вы видели, что проще всего найти точечный спектр оператора. Следующая теорема сводит нахождение остаточного спектра оператора A к нахождению точечных спектров операторов A и A^* :

Теорема: Пусть H и H_1 — гильбертовы пространства, $A: H \rightarrow H_1$ — линейный ограниченный оператор и $\lambda \notin \sigma_p(A)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(1) $\lambda \in \sigma_r(A)$;

(2) $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$.

Д-во. (1) $\Rightarrow$ (2): Нам дано, что $\lambda \in \sigma_r(A)$.

Значит, $\text{dom } (A - \lambda I)^{-1}$ не плотно в H .

Из свойств обратного оператора мы знаем, что $\text{dom } (A - \lambda I)^{-1} = \text{im } (A - \lambda I)$ и является линейной подпр-ва пр-ва H .

Закрывание подпр-ва $\text{im } (A - \lambda I)$ обозначим через S .

Поскольку $\text{im } (A - \lambda I)$ не плотно в H , то $S \neq H$.

Значит, $H = S \oplus S^\perp$; т.е. H является
прямой суммой своего замкнутого
подпр-ва S и его ортогонального
дополнения $S^\perp$.

Более того, $S^\perp \neq \{0\}$, поскольку
иначе мы бы получили $H = S$, а
это не так, поскольку $\lambda \in \sigma_r(A)$.

Фиксируем $y \in S^\perp$ так, чтобы $y \neq 0$.

Тогда $\forall x \in H$ имеем

$$(x, (A - \lambda I)^* y) = (\underbrace{(A - \lambda I)x}_{\in S}, \underbrace{y}_{\in S^\perp}) = 0 = (x, 0).$$

По линейности отсюда заключаем, что

$$(A - \lambda I)^* y = 0 \Rightarrow (A^* - \bar{\lambda} I) y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^* y = \bar{\lambda} y, \text{ причем } y \neq 0.$$

Значит y является собственным вектором
оператора A^* , отвечающим собственному
значению $\bar{\lambda}$ оператора A^* .

Следовательно, $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$; а значит
выполнено утверждение (2).

(2) $\Rightarrow$ (1): Не потрѣба нишѣ доказывать, что
 $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$ и $\lambda \notin \sigma_p(A)$.

$$\Downarrow$$

$$\exists y \in H: y \neq 0 \text{ и } A^*y = \bar{\lambda}y \Leftrightarrow (A^* - \bar{\lambda}I)y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda I)^*y = 0.$$

Значит, $\forall x \in H$ имеем $(x, 0) = 0 =$
 $= (x, (A - \lambda I)^*y) \stackrel{\text{ор}}{=} (\underbrace{(A - \lambda I)x}_{\in \text{im}(A - \lambda I)}, y)$

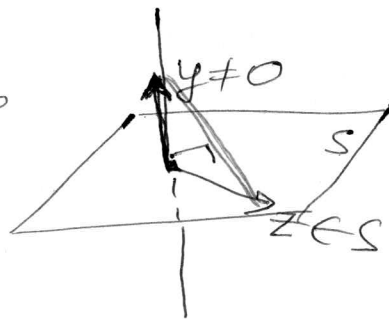
Следовательно, вектор y перпендикулярен
 любому вектору y подпространства
 $\text{im}(A - \lambda I)$.

В силу непрерывности скалярного
 произведения по первому аргументу, это
 означает, что y перпендикулярен любому
 вектору $y \in S = \mathcal{C}[\text{im}(A - \lambda I)]$: если
 $x \in S$, то $\exists x_1, \dots, x_n, \dots$ — последователь-
 ность векторов $y \in \text{im}(A - \lambda I)$, такая, что $x_n \rightarrow x$ по $n \rightarrow \infty$, а значит
 $0 = \underbrace{(x_n, y)}_{\substack{\rightarrow \\ n \rightarrow \infty}} \rightarrow (x, y)$, т.е. $(x, y) = 0$, т.е. $x \perp y$
 $\text{im}(A - \lambda I)$

Итак, есть ненулевой $y \neq 0$ такой, что
 $y \in S^\perp$.

Из существования такого y вытекает, что S плотно в H .

В следующем главе, с помощью векторов из S можно подобрать к y ближе, чем на $\|y\| \neq 0: \forall z \in S$



$$\|y - z\|^2 = \|y\|^2 + \underbrace{\| -z \|^2}_{\geq 0} \geq \|y\|^2.$$

Теорема Пифагора

Заметим, что рез. сеп-во $S = \text{cl}[\text{im}(A - \lambda I)]$ не плотно в H , то и сеп-во $\text{im}(A - \lambda I)$ не плотно в H .

Из определения спектра оператора вытекает, что ситуация, когда $\text{im}(A - \lambda I)$ не плотен в H имеет место для каждого λ в $\mathbb{C}$.

Случаи λ : либо когда оператор $(A - \lambda I)$ не обратим (т.е. когда $\lambda \in \sigma_r(A)$), либо когда $\lambda \in \sigma_r(A)$. Но по условию $\lambda \notin \sigma_r(A)$. Значит, $\lambda \in \sigma_r(A)$, т.е. выполнено условие (1).

Теорема доказана.