

7.13 Ограниченные самосопряжённые операторы.

Опр: Пусть H - гильбертово пространство и $A: H \rightarrow H$ - линейный ограниченный оператор. Говорят, что A - самосопряжённый, если $A = A^*$, т.е. если $\forall x, y \in H$ имеем

$$(Ax, y) = (x, Ay).$$

Теорема (о точном спектре самосопряжённого ограниченного оператора): Все собственные числа самосопряжённого ограниченного оператора вещественны, а собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны друг другу.

Д-во: Пусть λ - собственное значение оператора A . Тогда существует $x \in H$, $x \neq 0$, такой, что $Ax = \lambda x$. Тогда $\lambda \|x\|^2 = \lambda (x, x) =$
 $= (\lambda x, x) = (Ax, x) = (x, Ax) = (x, \lambda x) =$
 $= \overline{(\lambda x, x)} = \overline{\lambda (x, x)} = \overline{\lambda} \|x\|^2.$
Поскольку $\|x\| \neq 0$, из равенства $\lambda \|x\|^2 = \overline{\lambda} \|x\|^2$ следует $\lambda = \overline{\lambda}$, т.е. $\lambda \in \mathbb{R}$.

Теперь докажем второе утверждение теоремы о точном спектре самосопряженного оператора. Пусть λ и μ — два различных собственных значения оператора A . Это значит, что существуют $x, y \in H$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, такие, что

$$\begin{array}{l|l} Ax = \lambda x & \text{уединенные слагаемые} \\ Ay = \mu y & \text{уединенные слагаемые} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \Rightarrow (Ax, y) = (\lambda x, y) = \lambda (x, y) & \\ (x, Ay) = (x, \mu y) = \mu (x, y) & \text{Возьмем} \\ \uparrow & \text{одно рав-во} \\ \text{т.к. } \mu \in \mathbb{R} & \text{из другого} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 0 = (Ax, y) - (x, Ay) = (\lambda - \mu)(x, y) \Rightarrow (x, y) = 0 \\ \uparrow \text{т.к. } A \text{ самосопряженный} \quad \neq 0 \text{ по условию теоремы} \quad \text{т.е. } x \perp y. \text{ УТД.} \end{array}$$

Опз: Пусть H — гильбертово пр-во, $A: H \rightarrow H$ — линейный оператор и $S \subset H$ — подпространство в H . Тогда, что S является инвариантным подпространством оператора A , если $\forall x \in S$ имеем $Ax \in S$.

Примеры инвариантных подпространств:

- (1) Все $u \in H$ является инвариантным подпространством любого оператора $A: H \rightarrow H$.
- (2) Нулевое подпр-во (т.е. $S = \{0\}$) тоже является инвариантным подпр-вом любого оператора.

(3). Фиксируем число λ и обозначим через S_λ совокупность всех собственных векторов оператора $A: H \rightarrow H$, отвечающих собственному значению λ , и нулевого вектора $0 \in H$. Убедимся, что S_λ - инвариантное подпр-во оператора A . Пусть $x, y \in S_\lambda$ и α, β - числа. Тогда $Ax = \lambda x$, $Ay = \lambda y$ и $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = \alpha \cdot \lambda x + \beta \cdot \lambda y = \lambda(\alpha x + \beta y)$. Т.е. $\alpha x + \beta y \in S_\lambda$. $\square$

Вопрос для самостоятельного обсуждения:
зачем понадобилось "принудительно"
добавить в S_λ нулевой вектор $0 \in H$
в определении S_λ ?

Напоминание: Если S - подпространство в H , то сек-во $\{x \in H \mid \forall y \in S \ x \perp y\}$ называется ортогональным дополнением к подпр-ву S и обозначается $S^\perp$.

Теорема (об инвариантности подпр-ва). Пусть H - гильбертово пр-во, $A: H \rightarrow H$ - самосопряженный ограниченный оператор и $S \subset H$ - инвариантное подпр-во оператора A . Тогда $S^\perp$ тоже является инвариантным подпр-вом оператора A .

Док. Если $x \in S^\perp$, то $\forall y \in S$ имеем

$$(y, Ax) = (Ay, x) = 0, \text{ т.к. } Ay \in S.$$

Значит, если убедиться, что $\forall x \in S^\perp$ вектор Ax ортогонален любому вектору $y \in S$, т.е. $Ax \in S^\perp$. Но это и значит, что $S^\perp$ - инвариантное подпространство оператора A . УТД.

Лемма (о норме самосопряженного оператора) (обязательная): Если $A: H \rightarrow H$ - самосопряженный ограниченный оператор, то

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |(Ax, x)| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| = \sup_{x \neq 0} \frac{|(Ax, x)|}{\|x\|^2}.$$