7.14 Компактные операторы

<u>Опр</u> Пусть H, H_1 - гильбертовы пространства и $A: H \to H_1$ - линейный оператор. Говорят, что A является компактным оператором, если существует последовательность $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ линейных операторов такая, что

(1) $\forall n$ $A_n: H \to H_1$ и является ограниченным;

(2) $\forall n$ $\dim(\operatorname{im} A_n) < +\infty$

(3) $A_n \to A$ при $n \to \infty$.

<u>Замечание</u> В этом пункте операторы, обладающие св-вом (2) будем для краткости называть конечномерными, хотя правильнее было бы называть их операторами с конечномерным образом

<u>Св-ва</u> компактных операторов (через H, H_1, H_2 обозначены гильбертовы пр-ва):

(1) Если $A: H \to H_1$ и $B: H \to H_1$ - линейные компактные операторы, то $\forall \alpha, \beta$ - числа оператор $\alpha A + \beta B: H \to H_1$ тоже является компактным.

<u>Д-во.</u> A - компактен $\Rightarrow \exists A_1, \ldots, A_n, \ldots$, удовлетворяющая св-вам (1)-(3).

B - компактен $\Rightarrow \exists B_1, \ldots, B_n, \ldots$, удовлетворяющая св-вам (1)-(3).

Убедимся, что последовательность $\alpha A_1+\beta B_1,\ \alpha A_2+\beta B_2, \dots, \alpha A_n+\beta B_n, \dots$ обладает св-вами (1)-(3) применительно к оператору $\alpha A+\beta B$.

(1) $\forall n$ $\alpha A_n+\beta B_n$ является ограниченным, т.к.

$$\|\alpha A_n+\beta B_n\| \le \|\alpha A_n\|+\|\beta B_n\| = |\alpha|\cdot\|A_n\|+|\beta|\cdot\|B_n\|<+\infty$$

(2) $\forall n$ $\dim\left[\mathrm{im}(\alpha A_n+\beta B_n)\right]<+\infty$, т.к.

$$\mathrm{im}(\alpha A_n+\beta B_n)=\{x\in H_1 \mid \exists y\in H: x=(\alpha A_n+\beta B_n)y\}\subset$$

$$\subset \mathrm{im}\, A_n \cup \mathrm{im}\, B_n \Rightarrow \dim\left[\mathrm{im}(\alpha A_n+\beta B_n)\right] \le$$

$$\le \dim(\mathrm{im}\, A_n)+\dim(\mathrm{im}\, B_n)<+\infty.$$

(3) $\alpha A_n+\beta B_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha A+\beta B$, т.к. $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$, $B_n \xrightarrow[n\to\infty]{} B$ и предел последовательности операторов обладает свойством линейности.

Значит, св-во (1) доказано.

(2) Если A компактен, то A ограничен.

<u>Д-во</u>: A - компактен $\Rightarrow \exists A_1, \dots, A_n, \dots$, удовлетворяющая св-вам (1)-(3), в частности, $\forall n$ A_n - ограничен и $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$.

Но из п. 7.4 мы знаем, что предел A последовательности ограниченных операторов $A_1, \dots, A_n, \dots$ — сам является ограниченным оператором (причём $\|A\| = \lim\limits_{n\to\infty}\|A_n\|$). Св-во (2) доказано.

(3) Если $A: H \to H_1$ ограничен и $\dim H_1 < +\infty$, то A компактен.

Д-во очевидно: достаточно положить $A_n = A$.

(4) Пусть $I: H \to H$ - тождественный оператор. Тогда следующие два утверждения эквивалентны:

(а) I компактен;

(б) $\dim H < +\infty$.

Д-во. б) ⇒ а) Следует из (3), поскольку $\|I\| = 1$.

а) ⇒ б) будем доказывать от противного, т.е. предположим, что I компактен и $\dim H = \infty$. Тогда $\exists\ A_1, \dots, A_n, \dots$ - последовательность линейных операторов такая, что

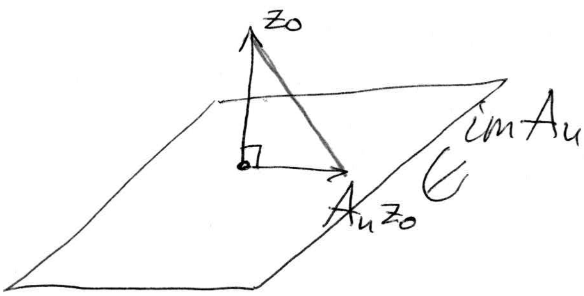
((1)) $\forall n\ A_n: H \to H$ - ограничен;

((2)) $\forall n\ \dim(\operatorname{im} A_n) < +\infty$;

((3)) $A_n \to I$ при $n \to \infty$, т.е. $\|I - A_n\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Фиксируем n. Поскольку $\dim H = \infty$, а $\dim(\operatorname{im} A_n) < +\infty$, то $\exists\ y_1, \dots y_N$ -

Ортонормированный базис в $\operatorname{im} A_n$ (конечно, $N = \dim(\operatorname{im} A_n)$) и $\exists\, y_0 \in H$, который ~~не~~ линейно независим от $y_1, \ldots, y_N$. Положим (как в процессе ортогонализации Грама - Шмидта) $\tilde{y}_0 = y_0 - \sum_{k=1}^{N} (y_0, y_k) y_k$ и $z_0 = \frac{\tilde{y}_0}{\|\tilde{y}_0\|}$. Тогда $\|z_0\| = 1$ и $\forall k = 1, \ldots, N$ $(z_0, y_k) = 0$.



Другими словами, мы нашли единичный вектор z_0, который перпендикулярен любому вектору y из $\operatorname{im} A_n$:

Поэтому можем написать: $\|I - A_n\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|(I - A_n)x\| \geqslant$

$\geqslant \|(I - A_n) z_0\| = \|z_0 - A_n z_0\| \geqslant \|z_0\| = 1.$

по теореме Пифагора:
$\|z_0 - A_n z_0\|^2 = \|z_0\|^2 + \|A_n z_0\|^2 \geqslant \|z_0\|^2$

Таким образом мы доказали, что $\forall n$ $\|I - A_n\| = 1$.

Это противоречит тому, что выполняется условие ((3)): $\|I - A_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Значит неверно наше предположение о том, что одновременно выполнены два св-ва: I- компактен и $\dim H = \infty$. Поэтому из а) следует б) и св-во (4) доказано.

(5) Пусть $A: H_1 \to H_2$ компактен, а операторы $B: H \to H_1$ и $C: H_2 \to H_3$ ограничены. Тогда оба оператора $AB: H \to H_2$ и $CA: H_1 \to H_3$ компактны.

Д-во. Вытекает прямо из определения компактного оператора и общих свойств нормы оператора:

A - компактен $\Rightarrow \exists$ последовательность $A_1, \dots, A_n, \dots$ линейных операторов такая, что

((1)) $\forall n \quad A_n: H_1 \to H_2$ - ограничен;

((2)) $\forall n \quad \dim(\operatorname{im} A_n) < +\infty$;

((3)) $A_n \to A$ при $n \to \infty$.

Положим $B_n = A_n B: H \to H_2$ и $C_n = CA_n: H_1 \to H_3$.

Прямая проверка показывает, что для них выполняются св-ва ((1)) - ((3)) применительно к операторам AB и CA соответственно. В самом деле:

(1) $\|B_n\| = \|A_n \cdot B\| \le \|A_n\| \cdot \|B\| < +\infty \Rightarrow B_n$ - ограничен;

$\|C_n\| = \|C \cdot A_n\| \le \|C\| \cdot \|A_n\| < +\infty \Rightarrow C_n$ - ограничен

(2) $\dim(\mathrm{im}\, B_n) \le \dim(\mathrm{im}\, A_n) < +\infty$ потому, что

$\mathrm{im}\, B_n = \mathrm{im}\, A_n B = \{x \in H_2 \mid \exists y \in H : x = (A_n B) y\} \subset$

$\subset \{x \in H_2 \mid \exists z \in H_1 : x = A_n z\} = \mathrm{im}\, A_n.$

ведь в качестве z можно взять By

$\Rightarrow \dim(\mathrm{im}\, B_n) \le \dim(\mathrm{im}\, A_n).$

Неравенство $\dim(\mathrm{im}\, C_n) \le \dim(\mathrm{im}\, A_n) < +\infty$ доказывается аналогично.

(3) $\|AB - B_n\| = \|AB - A_n B\| = \|(A - A_n)B\| \le$

$\le \|A - A_n\| \cdot \|B\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Аналогично $\|CA - C_n\| = \|CA - CA_n\| = \|C(A - A_n)\| \le$

$\le \|C\| \cdot \|A - A_n\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Это и завершает д-во св-ва (5) компактных операторов

(6) Пусть $A : H \to H_1$ - компактный обратимый оператор и пусть $\dim H = \infty$. Тогда A^{-1} не является ограниченным.

<u>Д-во</u> (от противного). Пусть A^{-1} - ограничен.

Тогда $\underbrace{\underbrace{A^{-1}}_{\text{ограничен}} \underbrace{A}_{\text{комп.}}}_{\substack{\text{по (5)} \Rightarrow \\ A^{-1}A-\text{комп.}}} = \underbrace{I_H}_{\substack{\text{тождественный} \\ I_H : H \to H}}$

Значит, I_H - компактен. По св-ву (4) $\dim H < +\infty$. Пришли к противоречию с условием $\dim H = +\infty$. Св-во (6) доказано.

<u>Замечание</u> Св-во (6) можно сформулировать ещё и в терминах спектра: если A - компактен и $\dim H = \infty$, то $0 \in \sigma(A)$.

В самом деле, если мы допустим противное, то $0 \in \rho(A)$, т.е. при $\lambda = 0$ оператор $(A - \lambda I)^{-1} = A^{-1}$ будет обратим и определён во всём пр-ве H. Но тогда по теореме Банаха он будет ограничен, что противоречит св-ву (6).

<u>Теорема</u> (о существовании базиса из собственных векторов компактного самосопряжённого оператора) (без д-ва). Пусть H - гильбертово пр-во, $\dim H \neq 0$, $A : H \to H$ - компактный самосопряжённый оператор. Тогда в H существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора A, т.е. таких векторов $x_1, \dots, x_n, \dots$, что $\forall n \ \|x_n\| = 1$; $\forall n \neq m \ x_n \perp x_m$; и $\forall n \ Ax_n = \lambda_n x_n$, где λ_n - собственные числа оператора A.

Замечание. В случае, когда $\dim H < +\infty$, последняя теорема означает, что в H существует базис, в котором матрица оператора $\hat{A}$ становится диагональной. Именно в таком виде вы доказывали эту теорему в линейной алгебре