

④.2) Непрерывные и ограниченные операторы.

В следующих определениях H, H_1 обозначают гильбертовы пространства, $A: H \rightarrow H_1$ - линейный оператор.

Опр. 1: Оператор A является непрерывным в точке $x_0 \in H$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in H$ такого, что $\|x - x_0\| < \delta$ справедливо неравенство ~~$\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$~~
 $\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$.

Замечание. Это определение не является для нас новым: оно повторяет известное нам из мат. анализа определение непрерывной функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Поэтому не удивительно, что это определение можно выразить другими словами:

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0 \Rightarrow Ax_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Ax_0$$

$$\text{или } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = Ax_0$$

$$\text{или } \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = A \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right).$$

Опр. 2: Оператор A называется непрерывным, если он непрерывен в каждой точке пространства H .

Опр. 3: Множество $\{x \in H: \|x - x_0\| \leq R\}$

называется (замкнутой) шаром радиуса R с центром в точке $x_0 \in H$.

Обозначение: $B(x_0, R)$.

Опр. 4: Множество $X \subset H$ называется ограниченным, если оно содержится в некотором шаре конечного радиуса

Задача: Докажите, что если X содержится в некотором шаре конечного радиуса, то оно содержится и в некотором шаре конечного радиуса с центром в нуле, т.е. если $X \subset B(x_0, R_0)$, то $\exists R$ такое, что $X \subset B(0, R)$.

Из этой задачи следует, что определение 4 эквивалентно следующему

Опр. 4': Множество $X \subset H$ называется

ограниченным, если оно содержится в некотором шаре конечного радиуса с центром в нуле, т.е. если $\exists R < +\infty$:

$\forall x \in X$ справедливо неравенство $\|x\| \leq R$.

Опр. 5 Говорят, что оператор $A: H \rightarrow H_1$ является ограниченным, если он переводит всякое ограниченное множество в ограниченное, т.е. если $\forall X \subset H$, которое является ограниченным множеством, множество $AX \subset H_1$ тоже является ограниченным.

Теорема (о непрерывных и ограниченных операторах). Пусть H и H_1 — метрические пространства, и $A: H \rightarrow H_1$ — линейный оператор. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1) $\exists x_0 \in H$: оператор A непрерывен в точке x_0 ;
- (2) A непрерывен;
- (3) A ограничен;
- (4) $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| < +\infty$.

Док-во:

(1) $\Rightarrow$ (2): Намекаем, что A непрерывен в т. x_0 , т.е. что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$.

Фиксируем $x_1 \in H$ и убеждаемся, что если $\forall \varepsilon > 0$ будем брать $\delta > 0$ из предыдущего предложения, то из неравенства $\|y - x_1\| < \delta$ будет следовать пер-во $\|Ay - Ax_1\| < \varepsilon$.

Тем самым будет доказано, что

A непрерывен в точке x_1 , а т.к. x_1 - произвольная точка, то A непрерывен. и (2) будет доказано

Рассмотрим этот шаг:

$$\|y - x_1\|_{\pm x_0} = \underbrace{\|y - x_1 + x_0 - x_0\|}_{\|x - x_0\|} = \|x - x_0\| < \delta;$$

поскольку A непрерывен в т. x_0 , то

$$\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$$

||

$$\|A(y - x_1 + x_0) - Ax_0\| \underset{\uparrow}{=} \|Ay - Ax_1 + \cancel{Ax_0} - \cancel{Ax_0}\| (= \|Ay - Ax_1\|)$$

используем линейность A

$$(2) \Rightarrow (3)$$

Теперь нам дано, что оператор A непрерывен. Значит, он непрерывен в каждой точке, в том числе и в т. $x_0 = 0$. Заменим $\varepsilon > 0$ для случая $\varepsilon = 1$:

$$\exists \delta > 0 : \text{из } \|x - 0\| < \delta \text{ следует } \|Ax - 0\| < 1. \quad (*)$$

Пусть теперь $X \subset H$ - произвольное ограниченное множество, т.е. $\exists R : \forall x \in X$
 $\|x\| \leq R$.

И пусть $y \in AX$, т.е. $\exists x \in X: y = Ax$.

Тогда $\|y\| = \|Ax\| = \left\| A \left(\frac{R}{\delta} \cdot \frac{\delta}{R} x \right) \right\| = \frac{R}{\delta} \|A(\frac{\delta}{R} x)\|$

При этом $\left\| \frac{\delta}{R} x \right\| = \frac{\delta}{R} \|x\| \leq \frac{\delta}{R} R = \delta$.

Вспомогательная по свойству (*) $\|A(\frac{\delta}{R} x)\| < 1$.

Следовательно, $\|y\| \leq \frac{R}{\delta}$. А это значит, что множество AX содержится в шаре радиуса $\frac{R}{\delta}$ с центром в нуле, т.е. является ограниченным. Поскольку ограниченное мн-во X было взято произвольным, то A -ограниченный оператор, т.е. (3) доказано.

(3) $\Rightarrow$ (4) Не этот же шаг дано, что A -ограниченный оператор, т.е. что он переводит любое ограниченное мн-во в ограниченное. Поскольку мн-во $\{x \in H: \|x\| \leq 1\} = B(0, 1)$ является ограниченным, то и мн-во $\{Ax: \|x\| \leq 1\} = A(B(0, 1))$ является ограниченным, т.е. содержится в некотором шаре $B(0, R)$, т.е. $\forall x \in H: \|x\| \leq 1$ выполняется неравенство $\|Ax\| \leq R$.

Следовательно, $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq R$, что
и доказывает св-во (4).

(4) $\Rightarrow$ (1) Наме дано, что $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \stackrel{\text{по (4)}}{=} R < +\infty$

Убедимся, что оператор A непрерывен в т. $x_0 = 0$.
Фиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. Положим $\delta = \frac{\varepsilon}{R}$.
Докажем, что $\|x\| < \delta$. Тогда при $x \neq 0$ имеем

$$\|Ax\| = \left\| A \left(\|x\| \cdot \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| = \|x\| \left\| A \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq \delta \cdot R = \frac{\varepsilon}{R} \cdot R = \varepsilon.$$

При $x = 0$ имеем

$$\|Ax\| = \|A0\| = \|0\| = 0 < \varepsilon.$$

Значит, $\forall \varepsilon > 0$ есть указанный $\delta = \frac{\varepsilon}{R} > 0$

такой, что $\forall x \in H : \|x\| = \|x - 0\| < \delta$

выполняется неравенство $\|Ax\| = \|Ax - A0\| < \varepsilon$.

Значит, A непрерывен в точке $x_0 = 0$.
Значит, (1) доказано.

Тем самым, теорема доказана

Замечание: Если линейный оператор
непрерывен в одной точке, то он непрерывен
всюду. Др. следствие: если он разрывен
в одной точке, то он разрывен всюду.