7.3 Норма оператора

В предыдущем пункте мы доказали, что условие

$$\sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| < +\infty \quad (*)$$

эквивалентно требованию непрерывности оператора A, и эквивалентно требованию ограниченности A. Поэтому исследуем условие $(*)$ подробнее.

<u>Лемма</u>. Пусть H и H_1 — гильбертовы пр-ва и $A: H \to H_1$ — линейный оператор. Тогда

$$\underbrace{\sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\|}_{\alpha} = \underbrace{\sup_{\|x\|=1} \|Ax\|}_{\beta} = \underbrace{\sup_{x\ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}_{\gamma}.$$

<u>Д-во</u>: $\alpha \ge \beta$ — очевидно.

$\beta \ge \gamma$ — $\forall x \ne 0$ имеем

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \left\| \frac{1}{\|x\|} Ax \right\| = \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \le \sup_{\|y\|=1} \|Ay\| = \beta$$

$$\Rightarrow \gamma = \sup_{x\ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \beta \Rightarrow \gamma \le \beta.$$

$\gamma \ge \alpha$ — $\forall x: \|x\| \le 1$ имеем

если $x \ne 0$, то $\|Ax\| \le \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \sup\limits_{y\ne 0} \dfrac{\|Ay\|}{\|y\|} = \gamma$;

если $x = 0$, то $Ax = 0$ и $\|Ax\| = 0 \le \gamma$.

Следовательно, $\alpha = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Ax\| \le \gamma \Rightarrow \alpha \le \gamma$.

Лемма доказана.

<u>Опр</u> Общее значение супремумов из предыдущей леммы называется нормой оператора A. <u>Обозначение</u>: $\|A\|$.

<u>Теорема</u> (о свойствах нормы линейного оператора). Пусть A и B - линейные операторы и λ - число. Тогда

(1) $\|A\| \ge 0$, причём $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$;

(2) $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$

(3) $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$

(4) $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$ $\forall x$ - вектор

(5) $\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$

(6) $\big| \|A\| - \|B\| \big| \le \|A-B\|$

<u>Замечание</u>: Св-ва (1)-(3) показывают, что норма оператора законно носит название нормы, поскольку удовлетворяет аксиомам нормы.

Док-во.

(1) Неравенство $\|A\| \ge 0$ очевидно, т.к.
$$\|A\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| \ge 0.$$

Импликация $A=0 \Rightarrow \|A\|=0$ очевидна, т.к. $\|O\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Ox\| = 0$.

Докажем импликацию $\|A\|=0 \Rightarrow A=0$.

Поскольку $\|A\| = \sup\limits_{x\ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0$, то

$\forall x \ne 0$ $\|Ax\|=0$, т.е. по свойствам нормы вектора $Ax=0$.

Если же $x=0$, то $Ax=0$ в силу линейности оператора A.

Значит, $\forall x$ $Ax=0$. Но это и значит, что оператор A нулевой, т.е. $A=0$.

② Докажем, что $\|\lambda A\| = |\lambda|\cdot\|A\|$.

Фиксируем вектор x такой, что $\|x\|\le 1$

Тогда $\|\lambda Ax\| \underset{\uparrow}{=} |\lambda|\cdot\|Ax\| \le |\lambda| \sup\limits_{\|y\|\le 1}\|Ay\| = |\lambda|\cdot\|A\|$

свойство нормы векторов

Значит, мы доказали неравенство $\|\lambda A\| \le |\lambda|\cdot\|A\|$. Теперь докажем обратное неравенство; вместе они и будут означать, что имеет место равенство ⊛

Итак, если $\lambda\ne 0$, то

$\|A\| = \|\frac{1}{\lambda}(\lambda A)\| \le \frac{1}{|\lambda|}\|\lambda A\| \Rightarrow \|\lambda A\| \geqslant |\lambda|\cdot\|A\|$.

по уже доказанному

Последнее неравенство справедливо и для $\lambda = 0$, поскольку оно превращается в равенство $0 = 0$.

Окончательно получаем, что $\forall \lambda$

$\|\lambda A\| \geqslant |\lambda| \cdot \|A\| \geqslant \|\lambda A\|$, что и доказывает св-во ②.

③ Нужно доказать неравенство $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$.

Фиксируем вектор x такой, что $\|x\| \le 1$. Тогда

$$\|(A+B)x\| = \|Ax + Bx\| \underset{\text{св-во нормы векторов}}{\le} \|Ax\| + \|Bx\| \le$$

$$\le \sup_{\|y\| \le 1} \|Ay\| + \sup_{\|y\| \le 1} \|By\| = \|A\| + \|B\|.$$

Значит, $\sup\limits_{\|x\| \le 1} \|(A+B)x\| \le \|A\| + \|B\|$.

④ Нужно д-ть, что $\forall x \quad \|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$.

Если $x = 0$, то это нер-во очевидно, потому что оно превращается в равенство $0 = 0$.

Если $x \ne 0$, то $\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \sup\limits_{y \ne 0} \dfrac{\|Ay\|}{\|y\|} = \|A\|$. Значит,

$\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$.

⑤ Нужно док-ть $\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$.

Фиксируем вектор x такой, что $\|x\| \le 1$. Тогда

$$\|(AB)x\| = \|A(Bx)\| \overset{④}{\le} \|A\| \cdot \|Bx\| \overset{④}{\le} \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\| \le$$
$$\le \|A\| \cdot \|B\|.$$

Значит, $\|AB\| = \sup\limits_{\|x\| \le 1} \|(AB)x\| \le \|A\| \cdot \|B\|$.

⑥ Нужно доказать $\big| \|A\| - \|B\| \big| \le \|A-B\|$.

Это неравенство эквивалентно двум неравенствам

$$\underbrace{-\|A-B\| \le \overbrace{\|A\| - \|B\|}}_{\sqcup} \overbrace{\le \|A-B\|}^{\sqcap}$$

Докажем $\sqcap$: $\|A\| = \|(A-B)+B\| \overset{③}{\le} \|A-B\| + \|B\| \Rightarrow$
$$\|A\| - \|B\| \le \|A-B\|.$$

Нер-во $\sqcup$ можно доказать аналогично, а можно заметить, что оно превращается в $\sqcap$ после замены $A \leftrightarrow B$, а значит, верно.

<u>Пример</u> (оценивание нормы конечномерного оператора). Пусть $x_1, \dots, x_n$ – ортонормированный базис в H; $y_1, \dots, y_m$ – ортонормированный базис в H_1 и $A : H \to H_1$ – линейный оператор. Оценим норму A.

Т.к. $x_1, \dots, x_n$ – базис в H, то $\forall x \in H$ $x = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$. Кроме того,

$$Ax = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \lambda_j \right) y_k,$$ где a_{kj} – элементы

матрицы оператора A в базисах $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_m$ (См. пример (3) у п. 7.1).

Тогда $\forall j = 1, \ldots, n$ $\quad |\lambda_j| \le \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2} = \|x\|^2 = 1$

рав-во Парсеваля

и $\|Ax\| = \left\| \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \lambda_j \right) y_k \right\| \le$

$$\le \sum_{k=1}^{m} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \lambda_j \right| \cdot \underbrace{\|y_k\|}_{=1} \le \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| \cdot \underbrace{|\lambda_j|}_{\le 1} \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| < +\infty.$$

Значит, $\|A\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\| \le \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| < +\infty.$

Следствие. Каждый конечномерный линейный оператор имеет конечную норму, а значит, и ограничен, и непрерывен.