

(7.4) Сходимость операторов и операторные ряды

Пусть H и H_1 — гильбертово пространство и пусть T_n задан линейный оператор $A_n: H \rightarrow H_1$.

Говорят, что последовательность линейных операторов $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ сходится к линейному оператору $A: H \rightarrow H_1$, если $\|A_n - A\| \rightarrow 0$.

Обозначение: $A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$ или $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

Свойства сходящихся последовательностей операторов
(Предполагается, что операторы A, A_n, B, B_n действуют у H в H_1 , причем $A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$, $B_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B$):

(1) $\forall \alpha, \beta$ -числа $\alpha A_n + \beta B_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha A + \beta B$ (линейность);

Д-во: $\|(\alpha A_n + \beta B_n) - (\alpha A + \beta B)\| =$
 $= \|\alpha(A_n - A) + \beta(B_n - B)\| \stackrel{(3)}{\leq} \|\alpha(A_n - A)\| + \|\beta(B_n - B)\| =$

$\stackrel{(2)}{=} |\alpha| \cdot \|A_n - A\| + |\beta| \cdot \|B_n - B\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. УТД.

(2) Если $\|A_n\| < +\infty \quad \forall n$, то $\|A\| < +\infty$, причем $\|A_n\| \rightarrow \|A\|$.

Док-во: Т.к. $A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$, то $\|A_n - A\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Значит, $\exists n_0: \|A_{n_0} - A\| < 1$. Тогда

$$\|A\| = \|A - A_{n_0} + A_{n_0}\| \stackrel{(3)}{\leq} \|A - A_{n_0}\| + \|A_{n_0}\| \leq 1 + \|A_{n_0}\| \Rightarrow \text{оператор } A \text{ является}$$

компактно-нормальным.

Остается доказать, что $\|A_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|A\|$, т.е. что $\|A_n\| - \|A\| \rightarrow 0$, т.е. что $|\|A_n\| - \|A\|| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Используем св-во (6) у л. 7.3:

$$|\|A_n\| - \|A\|| \leq \|A_n - A\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ т.к. } A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A.$$

Задача (для самостоятельного решения):

Верно ли, что у $\|A_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|A\|$ следует, что $A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$?

Ответ: нет.

Опр (компактность): Последовательность операторов $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ называется фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon)$: $\forall n \geq n(\varepsilon) \forall p > 0$ выполняется неравенство $\|A_n - A_{n+p}\| < \varepsilon$.

Опр (компактность): Нормированное пространство называется компактным, если в нем всякая фундаментальная последовательность является сходящейся.

Теорема (о полноте пространства операторов).
 Если H и H_1 — гильбертовы пространства, то
 пространство ограниченных линейных опера-
 торов $A: H \rightarrow H_1$ с операторной нормой

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$
 является полным.

Опр. Пусть H и H_1 — гильбертовы пространства
 и пусть A_n задан линейный оператор
 $A_n: H \rightarrow H_1$. Операторный ряд называется
 рядовое выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n. \quad (*)$$

При этом выражение $S_N = \sum_{n=1}^N A_n$ называ-
 ется частичной суммой операторного ряда (*).

Говорят, что ряд (*) сходится, если последо-
 вательность его частичных сумм является
 сходящейся. При этом $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ называют
 суммой ряда (*) и обозначают $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$.

Т.е. полагают $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N A_n$.

Замечание Ряд и сумма ряда обозна-
 чаются одинаково $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$: все
 как в матем. анализе

Свойства сходящихся операторных рядов:

(1) (линейность) Если $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ и $B = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$, то

$\forall \alpha, \beta$ -числа ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha A_n + \beta B_n)$ сходится и имеет сумму равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha A_n + \beta B_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} A_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Д-во. $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha A_n + \beta B_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (\alpha A_n + \beta B_n) =$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\alpha \sum_{n=1}^N A_n + \beta \sum_{n=1}^N B_n \right] = \alpha \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N A_n + \beta \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N B_n =$$

$$= \alpha \sum_{n=1}^{\infty} A_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} B_n.$$

УТД

линейность
прямое следствие

(2) Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n\|$ сходится, то ~~операторный~~ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ тоже сходится, причем

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} A_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n\|.$$

Д-во. Убедимся, что последовательность частичных сумм $S_N = \sum_{n=1}^N A_n$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ является фундаментальной, т.е. что $\forall \varepsilon > 0$
 $\exists n(\varepsilon): \forall m \geq n(\varepsilon) \quad \forall p > 0 \quad \|S_m - S_{m+p}\| < \varepsilon.$

В самом деле, $\|S_m - S_{m+p}\| = \left\| \sum_{n=1}^m A_n - \sum_{n=1}^{m+p} A_n \right\| =$

$$= \left\| -\sum_{n=m+1}^{m+p} A_n \right\| \leq \sum_{n=m+1}^{m+p} \|A_n\|.$$

Однако, числовой

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n\|$ сходится. Следовательно, по
 критерию Коши сходимости числовых рядов
 имеем $\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon): \forall m \geq n(\varepsilon) \forall p > 0 \sum_{n=m+1}^{m+p} \|A_n\| < \varepsilon$.

С учетом (*) это означает, что $S_1, S_2, \dots, S_N, \dots$ —
 фундаментальная. Ввиду полноты пространства
~~для~~ ограниченных операторов она сходится
 к пределу по определенной мере называется
 этот предел суммой ряда $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$. При этом

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} A_n \right\| = \left\| \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N A_n \right\| = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^N A_n \right\| \leq$$

$$\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \|A_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n\|.$$

св-во (2) из п. 7.4

пер-во
треугольника

ИТД.

определение
суммы числового
ряда