

4.5 Обратимость оператора. Обратный оператор

Опр: Оператор $A: H \rightarrow H_1$ называется обратимым, если уравнение $Ax = y$ имеет не более одного решения $x \in H$ при любом $y \in H_1$.

Опр: Образом оператора $A: H \rightarrow H_1$ называется множество $AH = \{y \in H_1 \mid \exists x \in H: Ax = y\}$.

Обозначение: $\text{im } A$ (здесь im от английского слова *image*).

Лемма: $\text{im } A$ является подпространством пространства H_1 .

Д-во: Нужно показать, что $\forall y_1, y_2 \in \text{im } A$ и любых чисел α, β , вектор $\alpha y_1 + \beta y_2$ тоже принадлежит $\text{im } A$.

Пусть $j = 1, 2$. Тогда $y_j \in \text{im } A \Rightarrow \exists x_j \in H: y_j = Ax_j$. Поскольку H — линейное пр-во, то $\alpha x_1 + \beta x_2 \in H$. Поскольку A — линейный оператор, то $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Ax_1 + \beta Ax_2 = \alpha y_1 + \beta y_2$. Значит, для вектора $\alpha y_1 + \beta y_2$ найдётся вектор $\alpha x_1 + \beta x_2 \in H$ такой, что выполняется равенство $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha y_1 + \beta y_2$. Значит $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \text{im } A$, т.е.

in A -линейное подпространство. УТД.

Опр. Пусть оператор $A: H \rightarrow H_1$ обратим.

Тогда в подпространстве in A можно задать отображение по следующему правилу: каждому $y \in \text{in } A$ сопоставим тот единственный вектор $x \in H$, для которого $Ax = y$. Это отображение называется оператором, обратным к A и обозначается A^{-1} . Другими словами, если оператор A обратим и $y \in \text{in } A$, то две формулы эквивалентны: $Ax = y$ и $x = A^{-1}y$.

Замечание A^{-1} определён не во всем пр-ве H_1 , а только на его подпр-ве in A . Упомянутая выше связь (или равенство) между A и A^{-1} , вытекает с самого начала рассуждений оператора $A: H \rightarrow H_1$, определённые не во всем пр-ве H , а только на некотором подпр-ве пр-ва H . Это подпр-во называется областью опре-

действий оператора A и обозначается $\text{dom } A$. Сейчас мы изучаем только операторы A , определённые на всём H , т.е. такие что $\text{dom } A = H$.

Свойства обратного оператора:

(1) $\text{dom } A^{-1} = \text{im } A$.

(2) Если $A: H \rightarrow H_1$ линейен и обратим, то A^{-1} линейен.

Д.в. Пусть $y_1, y_2 \in \text{dom } A^{-1} = \text{im } A$.

Нужно показать, что для любых чисел α, β имеем $A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha A^{-1}y_1 + \beta A^{-1}y_2$.

$\forall j=1,2$ ~~существует~~ $\exists x_j \in H: Ax_j = y_j$ (или, что тоже самое, $x_j = A^{-1}y_j$). Так A — линейен, то

$$\begin{aligned} A(\alpha x_1 + \beta x_2) &= \alpha Ax_1 + \beta Ax_2 = \alpha y_1 + \beta y_2 \\ \Leftrightarrow \alpha x_1 + \beta x_2 &= A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) \\ \text{"} \quad \text{"} & \\ \alpha A^{-1}y_1 + \beta A^{-1}y_2 & \end{aligned}$$

Утд.

(3) Пусть $A: H \rightarrow H_1$ и $B: H_1 \rightarrow H_2$ — линейные обратимые операторы. Тогда линейный оператор $BA: H \rightarrow H_2$ обратим, причём $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

Д-во. Инъектность оператора BA уже доказана в п. 7.1.

Чтобы доказать обратимость, нужно проверить, что уравнение

$$(BA)x = z \quad (*)$$

имеет не более одного решения $x \in H$ для всякого $z \in H_2$

Перепишем $(*)$ в виде $B(Ax) = z$.

Поскольку B обратим, то ур-ние $By = z$

имеет не более одного решения y , причем

это решение ес. б. записано в виде $y = B^{-1}z$

Значит $Ax = B^{-1}z$. Но оператор A тоже

обратим, значит последнее уравнение

имеет не более одного решения x , причем

это решение ес. б. записано в виде

$$x = A^{-1}(B^{-1}z) = (A^{-1}B^{-1})z. \quad (**)$$

Тем самым, мы доказали, что $(*)$

имеет не более одного решения. Значит,

оператор BA обратим и его единственное

решение ур-ния $(*)$ ес. б. записано в

виде $x = (BA)^{-1}z$. Гравиевая эту р-ну

с $(**)$, заключаем, что $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$. $\square$

(4) Пусть $A: H \rightarrow H_1$ и $B: H_1 \rightarrow H$ — линейные операторы и $I_H: H \rightarrow H$, $I_{H_1}: H_1 \rightarrow H_1$ — тождественные операторы в H и H_1 соответственно.

Пусть $AB = I_{H_1}$ и $BA = I_H$. Тогда оператор A обратим и $A^{-1} = B$.

Д-во. От противного. Допустим, что A не обратим. Тогда $\exists y \in H_1$ и $\exists x_1, x_2 \in H$ такие, что $x_1 \neq x_2$ и $Ax_1 = y = Ax_2$. Тогда

$$\begin{array}{ccc} B(Ax_1) = By = B(Ax_2) \\ \parallel & & \parallel \\ I_H x_1 = x_1 & & I_H x_2 = x_2. \end{array}$$

Но это противоречит тому, что $x_1 \neq x_2$. Значит, A обратим.

Теперь воспользуемся равенством ~~$BA = I_H$~~ .

$AB = I_{H_1}$. Из него следует, что $\forall y \in H_1$

$A(By) = y$. Поскольку A обратим, то оно эквивалентно равенству $By = A^{-1}y$, справедливому для всех $y \in H_1$. Значит $B = A^{-1}$.

УТД