

⑦.6 Теорема Неймана

Теорема (Неймана): Пусть H -сепарабельное пространство, $A: H \rightarrow H$ -линейный ограниченный оператор, причём $\|A\| < 1$, $\text{dom } A = H$. Тогда $I-A$ обратим, $(I-A)^{-1}$ ограничен и $\text{dom } (I-A)^{-1} = H$, причём

$$(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n,$$

где $A^0 = I$, $A^{n+1} = A \cdot A^n \quad \forall n \geq 0$.

До-во

$$\begin{aligned} \|A^n\| &= \|A \cdot A^{n-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{n-1}\| \leq \dots \leq \|A\|^n \cdot \|A^0\| = \\ &= \|A\|^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad \begin{array}{c} \|I\| = 1 \end{array}$$

Значит,

$$(a) \|A^n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ т.к. } \|A^n\| \leq \|A\|^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0;$$

$$(b) \text{ ряд } \sum_{n=0}^{\infty} A^n \text{ сходится, т.к. } \sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1-\|A\|} < +\infty, \text{ поскольку } \|A\| < 1$$

(ссыл. св-во (2) сходящихся операторных рядов в л. 7.4)

Следовательно,

$$(I-A) \left(\sum_{n=0}^N A^n \right) = \sum_{n=0}^N A^n - \sum_{n=0}^N A^{n+1} = I - A^{N+1}$$

⑧ $\downarrow N \rightarrow \infty$

$$(I-A) \left(\sum_{n=0}^{\infty} A^n \right)$$

⑨ $\downarrow N \rightarrow \infty$
 I

$$\text{Значит, } (I-A) \left(\sum_{n=0}^{\infty} A^n \right) = I.$$

Аналогично можно доказать равенство

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} A^n \right) (I-A) = I.$$

Значит, по свойству (4) обратного оператора (лем. п. 7.5), $I-A$ обратим, и его обратным является оператор $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$, т.е.

$$(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n.$$

Оператор $(I-A)^{-1}$ ограничен, т.к. ограничен оператор $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$: $\left\| \sum_{n=0}^{\infty} A^n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1-\|A\|}$.
Конечно, $\text{dom } (I-A)^{-1} = \text{dom } \left(\sum_{n=0}^{\infty} A^n \right) = H$. $\square$

Замечание. Это легко показывает, что в скалярную прогрессию

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} = (1-q)^{-1}, \quad |q| < 1,$$

для скалярной геометрической прогрессии можно подставить не только число q (вещное или комплексное), но и оператор A (или их матрицы), если бы выполнялось условие $\|A\| < 1$.