

(7.7) Спектр оператора

Понятие спектра матрицы (т.е. конечномерного оператора) вам знакомо из линейной алгебры. Там спектром ^{матрицы A} называется совокупность всех собственных чисел матрицы A . Распространим понятие спектра на операторы, действующие в бесконечно-мерных пространствах. Новое понятие должно включать в себя старое, т.е. собственные числа матрицы должны быть элементами спектра и в новом понятии. Поскольку собственные числа могут быть комплексными, в этом пункте будем считать, что наше задано над полем $\mathbb{C}$.

Пусть $A: H \rightarrow H$ — линейный оператор. Фиксируем $\lambda \in \mathbb{C}$ и $y \in H$. Рассмотрим ур-ние $Ax - \lambda x = y$, т.е. $(A - \lambda I)x = y$. Выделим 4 случая, которые могут возникнуть при решении этого уравнения:

(1) Оператор $A - \lambda I$ не обратим, т.е. $\exists y \in H$ и $\exists x_1, x_2 \in H$ такие, что $x_1 \neq x_2$ и $Ax_1 - \lambda x_1 = y = Ax_2 - \lambda x_2$. В этом случае $\exists x \in H: x \neq 0$ и $Ax - \lambda x = 0$. [Достаточно взять $x = x_1 - x_2$].

Опр. Если $(A - \lambda I)$ не обратим (т.е. если $\exists x \neq 0 : Ax = \lambda x$), то λ называют собственным значением оператора A , а вектор $x \neq 0$ такой, что $Ax = \lambda x$, называют собственным вектором оператора A , соответствующим собственному значению λ . Совокупность всех собственных значений оператора A называют точечным спектром оператора A и обозначают $\sigma_p(A)$. [point]

(2) Оператор $(A - \lambda I)$ обратим, и верно $\text{dom } (A - \lambda I)^{-1} = H$.

Опр. В этом случае говорят, что λ является регулярным значением оператора A . Если во всех регулярных значениях оператора A называют резольвентным спектром оператора A и обозначают $\rho(A)$. Оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ называют резольвентным оператором оператора A и обозначают R_λ , т.е. $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$. Такое название объясняется тем, что он "разрешает" (resolve) изучаемое уравнение: $(A - \lambda I)x = y \Leftrightarrow x = (A - \lambda I)^{-1}y = R_\lambda y$. Приятным бонусом в этой ситуации является то, что резольвентный оператор R_λ

"автоматически" является ограниченным.

Это вытекает из следующего теоремы, доказанной польским математиком Стефаном Банахом (1892-1945).

Теорема (Банаха об обратном операторе) (бег. г. ва): Если H, H_1 - гильбертовы п-ва и $B: H \rightarrow H_1$ - линейный ограниченный обратный оператор, причем $\text{dom } B^{-1} = H_1$, то оператор B^{-1} ограничен.

(3) Оператор $(A - \lambda I)$ обратен, причем $\text{dom } (A - \lambda I)^{-1} \neq H$, но $\text{cl} [\text{dom } (A - \lambda I)^{-1}] = H_1$.

Опр. В этом случае говорят, что λ принадлежит непрерывному спектру оператора A и пишут $\lambda \in \sigma_c(A)$. [c or continuous]

(4) Оператор $(A - \lambda I)$ обратен, но $\text{dom } (A - \lambda I)^{-1}$ не плотно в H_1 (т.е. $\text{cl} [\text{dom } (A - \lambda I)^{-1}] \neq H_1$).

Опр. В этом случае говорят, что λ принадлежит остаточному спектру оператора A и пишут $\lambda \in \sigma_r(A)$. [r or residual]

Опр. Спектры $\sigma(A)$ оператора A называют дополнение резольвентного мн-ва $\rho(A)$ до $\mathbb{C}$, т.е. $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

Прямые св-ва спектра:

(1) $\sigma = \sigma_p \cup \sigma_c \cup \sigma_r$; $\sigma_p \cap \sigma_c = \sigma_c \cap \sigma_r = \sigma_r \cap \sigma_p = \emptyset$.

Д-во непосредственно следует из определения

(2) Спектр оператора A содержится в замкнутом круге радиуса $\|A\|$ с центром в 0, т.е.

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|A\|\}.$$

Д-во Это утв. эквивалентно тому, что любое $\lambda \in \mathbb{C}$ такое, что $|\lambda| > \|A\|$ обязательно является регулярным значением, т.е. $\lambda \in \rho(A)$.
Последнее следует из вычисления:

$$(A - \lambda I)^{-1} = [-\lambda(I - \frac{1}{\lambda}A)]^{-1} = \underbrace{[-\lambda I]^{-1}}_{\text{обратен в } \text{dom}(\cdot)^{-1} = H} \underbrace{(I - \frac{1}{\lambda}A)^{-1}}_{\text{обратен в } \text{dom}(\cdot)^{-1} = H} =$$

св-во (3) обратного оператора у л. 7.5

$$= \underbrace{(I - \frac{1}{\lambda}A)^{-1}}_{\text{существует и определен в } H} (-\frac{1}{\lambda}I)$$

обратен
в $\text{dom}(\cdot)^{-1} = H$

обратен
в $\text{dom}(\cdot)^{-1} = H$
по т-еме Неймана,
т.к. $\|\frac{1}{\lambda}A\| = \frac{\|A\|}{|\lambda|} < 1$

Существует и определен в H . УТД.

(3) $\sigma(A)$ является замкнутой лин-кой.

Д-во Это утверждение эквивалентно тому, что $\rho(A)$ является открытой лин-кой, т.е. что $\forall \lambda_0 \in \rho(A) \exists \varepsilon > 0 : \forall \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon \implies \lambda \in \rho(A)$.

Фиксируем $\lambda_0 \in \rho(A)$. Тогда

$$(A - \lambda I)^{-1} = [(A - \lambda_0 I) - (\lambda - \lambda_0)I]^{-1} =$$

$$= \left\{ (A - \lambda_0 I) \left[I - (\lambda - \lambda_0)(A - \lambda_0 I)^{-1} \right] \right\}^{-1}$$

обратен и
 $\text{dom}(\cdot)^{-1} = H$,
 т.к. $\lambda_0 \in \rho(A)$

обратен и $\text{dom}[\cdot]^{-1} = H$
 в силу теоремы Неймана, т.к.

$$\|(\lambda - \lambda_0)(A - \lambda_0 I)^{-1}\| = |\lambda - \lambda_0| \cdot \|(A - \lambda_0 I)^{-1}\| < 1$$

как только сам оператор

$$0 < \varepsilon = \frac{1}{\|(A - \lambda_0 I)^{-1}\|} < +\infty \text{ по т.-л. Банаха и}$$

$$|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon.$$

Значит, выберем $\varepsilon = \frac{1}{\|(A - \lambda_0 I)^{-1}\|}$, сам

укажем, что $\forall \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$

оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ обратен и обратным
 определён во всём H , т.е. все
 такие λ являются регулярируемыми
 значениями, т.е. $\lambda \in \rho(A)$.

УТД