

(7.8) Линейные функционалы

Опр Линейным функционалом называется линейный оператор, действующий из гильбертова пространства H в множество чисел (т.е. в $\mathbb{R}$ или в $\mathbb{C}$).

В этом пункте H всегда означает гильбертово пространство.

Пример линейного функционала: Фиксируем произвольно $x_0 \in H$. Тогда definireм

$$f(x) = (x, x_0),$$

где $x \in H$, а в правой части стоит скалярное произведение, задаёт линейный функционал $f: H \rightarrow \mathbb{C}$.

Замечание Для операторов мы знаем следующие понятия: линейная комбинация, норма, непрерывность, сходимость последовательности операторов, суммирование операторного ряда. Поскольку функционалом является оператором, то эти же понятия мы знаем и для функционалов. Но для функционалов есть некоторые специфические понятия, например "ядро".

Опр множество $\{x \in H \mid f(x) = 0\}$

называется ядром функционала f и обозначается $\ker f$.

Свойства ядра линейных функционалов;

(1) Для любого линейного функционала $f: H \rightarrow \mathbb{C}$ его ядро является подпространством в H .

Д-во: Нужно убедиться, что $\forall x, y \in \ker f$ и $\forall \alpha, \beta$ -мисе вектор $\alpha x + \beta y$ также в $\ker f$. Это очевидно ввиду линейности функционала f :

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \alpha x + \beta y \in \ker f. \quad \text{УТД}$$

(2) Если $f: H \rightarrow \mathbb{C}$ - непрерывный линейный функционал, то $\ker f$ является замкнутым множеством в H .

Д-во: Нужно доказать, что если $\forall n$ $x_n \in \ker f$ и $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0 \in H$, то $x_0 \in \ker f$.

Это очевидно ввиду непрерывности f :

$$f(x_0) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0 \Rightarrow x_0 \in \ker f. \quad \text{УТД}$$

Замечание: На самом деле верно и утверждение, обратное к св. 2), а именно: если $\ker f$ замкнуто, то f непрерывен. Но это утверждение не понадобится; поэтому доказывать его не будем.

(3) Если $f: H \rightarrow E$ - линейный непрерывный линейный функционал, то

$$\underbrace{\dim (\ker f)^\perp}_{\text{размерность ортогонального дополнения ядра}} \stackrel{\text{опр}}{=} \underbrace{\operatorname{codim} (\ker f)}_{\text{коразмерность ядра}} = 1$$

Доказ. f - непрерывен $\Rightarrow \ker f$ замкнуто $\Rightarrow H = (\ker f) \oplus (\ker f)^\perp$.

f - линейный $\Rightarrow \ker f \neq H \Rightarrow (\ker f)^\perp \neq \{0\}$.

Фиксируем $x_0 \in (\ker f)^\perp$ такой, что $x_0 \neq 0$ и убедемся, что x_0 образует базис в $(\ker f)^\perp$, т.е. что $\forall x_1 \in (\ker f)^\perp$ найдется α -число такое, что $x_1 = \alpha x_0$.

Для этого положим $\alpha = \frac{f(x_1)}{f(x_0)}$ и $y = \alpha x_0 - x_1$. Тогда, с одной стороны, $y \in (\ker f)^\perp$ (т.к. $x_0, x_1 \in (\ker f)^\perp$ и $(\ker f)^\perp$ является подпространством в H). С другой стороны,

$$y \in \ker f \quad (\text{т.к. } f(y) = f(\alpha x_0 - x_1) = \\ = \alpha f(x_0) - f(x_1) = \frac{f(x_1)}{f(x_0)} f(x_0) - f(x_1) = 0).$$

Но H является линейной суммой подпространств $\ker f$ и $(\ker f)^\perp$, а значит, есть только один линей, который целиком сразу в обоих подпространствах и этот линей — нулевой.
[Это же заключение следует из формулы]

$$\|y\|^2 = \underbrace{(y, y)}_{\substack{\text{ker } f \\ (\ker f)^\perp}} = 0 \Rightarrow y = 0.$$

$$\text{Так, } y = \alpha x_0 - x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \alpha x_0 \Rightarrow \\ x_0 - \text{образует базис в } (\ker f)^\perp \Rightarrow \\ \dim (\ker f)^\perp = 1. \quad \text{УТД}$$