

(7.9) Сопряжённое пространство.

Теорема Рисса об общем виде
линейного непрерывного ф-ла

Опр. св-во всех непрерывных линейных
функционалов, определённых на гильбертовом
пр-ве H , называется сопряжённым к H
пространством и обозначается H^* .

Замечание. Из п. 7.1 мы знаем, что H^* является
линейным пространством.

Теорема (Фридрихс Рисс (1880-1956) об общем
виде линейного непрерывного функционала):
Пусть H - гильбертово пространство. Тогда имеют
место следующие утверждения:

(1) $\forall f \in H^* \exists! x_0 \in H : f(x) = (x, x_0) \quad \forall x \in H;$
при этом $\|f\| = \|x_0\|;$

(2) $\forall x_0 \in H$ формула $f(x) = (x, x_0)$ задаёт
линейный непрерывный функционал на H
(т.е. $f \in H^*$); при этом $\|f\| = \|x_0\|.$

Д-во (2) Линейность ф-ла $f(x) = (x, x_0)$
очевидна ввиду линейности скалярного
произведения по первому аргументу.

Оценим норму f -ада f :

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{\|x\|=1} |(x, x_0)| \leq \left(\sup_{\|x\|=1} \|x\| \right) \|x_0\| = \|x_0\|$$

↑
кр-во Коши-
Бунковского

$\wedge$
 $+\infty$

Отсюда следует, что f непрерывен. Чтобы найти норму f , оценим её снизу. При этом рассмотрим два случая:

(1) $x_0 = 0$ ~~$\|f\|$~~ $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |(x, x_0)| = \sup_{\|x\|=1} 0 = 0 = \|x_0\|$

(2) $x_0 \neq 0$ $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |(x, x_0)| \geq \left| \left(\frac{x_0}{\|x_0\|}, x_0 \right) \right| = \frac{1}{\|x_0\|} \underbrace{(x_0, x_0)}_{\|x_0\|^2} = \|x_0\|$

Значит,
утверждение
~~(1)~~ (2)

$\|x_0\| \leq \|f\| \leq \|x_0\|$, т.е. $\|f\| = \|x_0\|$ $\square$
доказано.

Теперь докажем св-во (1). Прежде всего, докажем, что существует $x_0 \in H$ такой, что $f(x) = (x, x_0) \quad \forall x \in H$.

Если $f = 0$, то полагая $x_0 = 0$. Тогда $\forall x \in H$ будем иметь $f(x) = 0 = (x, 0) = (x, x_0)$.
Что и требовалось.

Если же $f \neq 0$, то $\ker f$ является замкнутой подпространством в H , $H = (\ker f) \oplus (\ker f)^\perp$
и $\dim (\ker f)^\perp = 1$ (последнее — по

св-ву (3) ядра некуревого линейного функционала).

Это значит, что $\forall x \in H \exists! x_1 \in \ker f$ и $\exists! x_2 \in (\ker f)^\perp : x = x_1 + x_2$, а также что $\exists x_3 \in (\ker f)^\perp : \|x_3\| = 1$ и $\forall x_2 \in (\ker f)^\perp \exists \alpha \in \mathbb{C} : x_2 = \alpha x_3$ (последнее как раз и означает, что в $(\ker f)^\perp$ есть базис, состоящий из одного вектора x_3).

Другими словами, это означает, что любой вектор $x \in H$ можно представить в виде $x = x_1 + \alpha x_3$, где x_3 — некоторый вектор, не зависящий от x .

$$\begin{aligned} \text{Тогда } f(x) &= f(x_1 + \alpha x_3) = \underbrace{f(x_1)}_{=0, \text{ т.к. } x_1 \in \ker f} + \alpha f(x_3) = \\ &= \cancel{f(x_3)} \underbrace{(x_1, x_3)}_{=0} + \alpha \cancel{f(x_3)} \underbrace{(x_3, x_3)}_{=1} = \\ &= (x_1, \overline{f(x_3)} x_3) + (\alpha x_3, \overline{f(x_3)} x_3) = \\ &= (\underbrace{x_1 + \alpha x_3}_x, \overline{f(x_3)} x_3) = (x, x_0), \text{ где } x_0 = \overline{f(x_3)} x_3. \end{aligned}$$

Таким образом существование вектора x_0 доказано.

Убедимся, что x_0 — единственен.

Рассуждаем от противного: предположим, что

$\exists \tilde{x}_0 \neq x_0$ такие, что $\forall x \in H$ имеем

$$(x, x_0) = f(x) = (x, \tilde{x}_0).$$

Тогда $(x, x_0 - \tilde{x}_0) = 0 \quad \forall x \in H$.

Подставим $x = x_0 - \tilde{x}_0$. Получим

$$(x_0 - \tilde{x}_0, x_0 - \tilde{x}_0) = \|x_0 - \tilde{x}_0\|^2 = 0 \Rightarrow$$

$x_0 - \tilde{x}_0 = 0 \Rightarrow x_0 = \tilde{x}_0$. Это противоречит
нашему допущению, что $\tilde{x}_0 \neq x_0$. Это проти-
воречие доказывает, что x_0 — единственный.

Равенство $\|f\| = \|x_0\|$ было доказано
при док-ве утверждения (1).

Теорема Рисса доказана.

Замечание Теорема Рисса показывает, что
соответствие между векторами $x_0 \in H$ и
функционалами $f \in H^*$, осуществляемое
формулой

$$f(x) = (x, x_0) \quad \forall x \in H \quad (*)$$

является изоморфизмом, т.е. что H и H^*
образуют друг у друга переобозначение.
Например, если $H = \mathbb{R}^n$ — n -во строк $x = (x_1, \dots, x_n)$,
то $H^* = (\mathbb{R}^n)^*$ — n -во столбцов и n -ра $(*)$
является матричной формой скалярного
произведения в $\mathbb{R}^n$:

$$(x, y) = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$