## §8. Интегральные уравнения

### 8.1 Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтéрра и примеры задач, приводящих к интегральным уравнениям.

<u>Опр</u>: Интегральным уравнением называют такое уравнение, в которое искомая функция входит под знаком интеграла.

<u>Замечание 1</u>: Это определение столь же неудачно (т.е. требует пояснений), как если бы мы определили дифференциальные ур-ия как уравнения, содержащие искомую функцию под знаком производной (например, ур-ние $\frac{dx}{dt} = x(x(t))$ не является дифференциальным).

Важнейшими примерами интегральных уравнений являются следующие:

$$\int_a^b K(t,s)x(s)ds + f(t) = 0$$ – интегральное ур-ие Фредгольма I рода

$$\int_a^b K(t,s)x(s)ds + f(t) = x(t)$$ – интегральное ур-ие Фредгольма II рода

$$\int_a^t K(t,s)x(s)ds + f(t) = 0$$ - интегральное ур-ние Вольтéрра I рода

$$\int_a^t K(t,s)x(s)ds + f(t) = x(t)$$ - интегральное ур-ние Вольтерра II рода

Здесь $K : [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{C}$ и $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ - известные (заданные) функции, а $x : [a,b] \to \mathbb{C}$ - искомая функция. Ф-ция $K$ наз-ся ядром инт. ур-ия.

Комментарий: У ур-ний Фредгольма пределы интегрирования постоянны, а у ур-ний Вольтерра верхний предел переменный. В ур-ниях I рода искомая ф-ция входит только под знаком интеграла, а в ур-ниях II рода она входит и под знаком интеграла, и вне него.

Замечание: Уравнения ~~Фредгольма~~ Вольтерра являются частным случаем уравнений Фредгольма, поскольку

$$\int_a^t K(t,s)x(s)ds = \int_a^b \tilde{K}(t,s)x(s)ds,$$

где $\tilde{K}(t,s) = \begin{cases} K(t,s), & \text{если } a \le s < t; \\ 0, & \text{если } t < s \le b. \end{cases}$

Замечание. Вы уже встречались с интегральными уравнениями в курсе дифференциальных уравнений. Там вы доказывали, что диф-ое ур-ние

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \qquad (*)$$

с начальным условием $x(t_0) = x_0$, эквивалентно (несомненно) интегральному ур-нию

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds. \qquad (**)$$

Вы доказывали с помощью метода последовательных приближений, что решение ур-ния $(**)$ существует и единственно. Тем самым вы доказывали существование и единственность решения диф-ого ур-ния $(*)$.

Приведём ещё один пример сведения начальной задачи для диф-ого ур-ния к интегральному ур-нию:

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) + p_1(t)\,x^{(n-1)}(t) + \ldots + p_n(t)\,x(t) = f(t), \\ x^{(n-1)}(a) = x^{(n-2)}(a) = \ldots = x'(a) = x(a) = 0, \\ a \le t \le b. \end{cases}$$

Положим

$$x(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t y(s)\,(t-s)^{n-1}\,ds, \qquad \binom{**}{*}$$

где $y : [a,b] \to \mathbb{C}$ — новая искомая функция.

Последовательно дифференцируя рав-во $\binom{**}{*}$ получим

$$x'(t) = \frac{n-1}{(n-1)!}\int_a^t y(s)(t-s)^{n-2}ds + \frac{1}{(n-1)!}\,y(t)(t-t)^{n-1} =$$

$$= \frac{1}{(n-2)!}\int_a^t y(s)(t-s)^{n-2}ds;$$

. . . . . .

$$x^{(k)}(t) = \frac{1}{(n-k-1)!}\int_a^t y(s)(t-s)^{n-k-1}ds, \quad \text{если } 1 \le k \le n-1$$

. . . . .

$$x^{(n-1)}(t) = \int_a^t y(s)\,ds,$$

$$x^{(n)}(t) = y(t).$$

Замечание: Не понятно откуда взявшееся рав-во $\binom{**}{*}$ на самом деле означает, что вместо „старой" искомой функции $x(t)$ мы решили взять „новую" искомую функцию $y(t) = x^{(n)}(t)$.

Замечание ~~Иначе~~ Начальные условия

$$x^{(n-1)}(a) = x^{(n-2)}(a) = \ldots = x'(a) = x(a) = 0$$

выполняются автоматически.

Подставив найденные выше выражения для $x^{(k)}(t)$ в левую часть решаемого дифференциального уравнения, получим

$$y(t) + \frac{p_1(t)}{0!}\int_a^t y(s)\,ds + \frac{p_2(t)}{1!}\int_a^t y(s)(t-s)\,ds + \ldots$$

$$+ p_n(t)\frac{1}{(n-1)!}\int_a^t y(s)(t-s)^{n-1}\,ds = f(t)$$

или

$$y(t) + \int_a^t K(t,s)\,y(s)\,ds = f(t),$$

где

$$K(t,s) = p_1(t) + \frac{1}{1!}p_2(t)(t-s) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}p_n(t)(t-s)^{n-1}.$$

Таким образом, начальная задача для линейного дифференциального уравнения $n$-го порядка с нулевыми начальными условиями сведена к интегральному уравнению Вольтерра II рода

Замечание: Теория интегральных уравнений – это язык (как правило) эквивалентный языку дифференциальных уравнений.