8.2 Интегральный оператор Гильберта–Шмидта.

<u>Опр.</u> Пусть $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ – фиксированная функция из пространства $L_2([a,b]\times[a,b])$, т.е. такая, что

$$\int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2 \, dt\,ds < +\infty .$$

Интегральным оператором Гильберта–Шмидта называется оператор $A : L_2[a,b] \to L_2[a,b]$, сопоставляющий каждой ф-ии $x \in L_2[a,b]$ функцию $Ax \in L_2[a,b]$ по правилу

$$(Ax)(t) = \int_a^b K(t,s)\, x(s)\, ds. \qquad (*)$$

При этом функция K называется ядром оператора Г-Ш.

<u>Замечание</u> Многие св-ва решений интегральных уравнений могут быть получены с помощью общих теорем об операторах в гильбертовом пространстве. Это ясно, например, из того, что уравнение Фредгольма II рода ~~[illegible]~~

$$x(t) = \int_a^b K(t,s)\, x(s)\, ds + f(t)$$

может быть записано в операторном виде

$$x = Ax + f,$$

где A – оператор Г.-Ш. $(*)$

Теорема (о компактности оператора Гильберта–Шмидта). Интегральный оператор Г.-Ш. A, заданный формулой (*), является линейным компактным оператором, переводящим пр-во $L_2[a,b]$ в себя. При этом его норма удовлетворяет нер-ву

$$\|A\| \leq \|K\|_{L_2([a,b]\times[a,b])} = \left\{\int_a^b\int_a^b |K(t,s)|^2 dt\,ds\right\}^{1/2}.$$

Док-во: Линейность оператора Г.-Ш. очевидно следует из линейности интеграла.

Убедимся, что $\forall x \in L_2[a,b]$ ф-ия Ax лежит в $L_2[a,b]$.

В самом деле, $\forall t \in [a,b]$ в силу нер-ва Коши-Буняковского имеем $|(Ax)(t)|^2 = \left|\int_a^b K(t,s)\overline{\overline{x}}(s)\,ds\right|^2 \leq$

$$\leq \int_a^b |K(t,s)|^2 ds \cdot \int_a^b |\overline{\overline{x}}(s)|^2 ds \leq \|x\|^2 \int_a^b |K(t,s)|^2 ds.$$

Проинтегрировав это неравенство по t по $[a,b]$, получим

$$\|Ax\|^2_{L_2[a,b]} = \int_a^b |(Ax)(t)|^2 dt \leq \|x\|^2 \int_a^b\int_a^b |K(t,s)|^2 ds\,dt =$$

$$= \|x\|^2_{L_2[a,b]} \cdot \|K\|^2_{L_2([a,b]\times[a,b])} < +\infty \Rightarrow Ax \in L_2[a,b].$$

Кроме того, отсюда следует, что

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_{L_2[a,b]} \leq 1} \|Ax\|_{L_2[a,b]} \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|x\| \cdot \|K\| = \|K\|,$$

т.е. мы доказали оценку нормы оператора A у нормы. Осталось доказать, что A компактен.

Сделаем это прямо по определению компакт-ного оператора, для чего построим последователь-ность $A_1, A_2, \dots, A_N, \dots$ линейных операторов такую, что

(1) $\forall N \quad A_N : L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ и $\|A_N\| < +\infty$;

(2) $\forall N \quad \dim(\operatorname{im} A_N) < +\infty$;

(3) $A_N \to A$ при $N \to \infty$.

I шаг: Построение операторов A_N.

Пусть $\{x_n(t)\}_{n=1,2,\dots} = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), \dots\}$ - какая-нибудь полная ортонормированная система функций в $L_2[a,b]$. Убедимся, что система функций $\{x_n(t)\overline{x_m(s)}\}_{n,m=1,2,\dots}$, образованная всевозможными попарными произведениями $x_n(t)\overline{x_m(s)}$, является полной ортонормированной системой функций в $L_2([a,b]\times[a,b])$.

В самом деле, её ортонормированность следует из вычисления:

$$\left(x_n(t)\overline{x_m(s)}, x_{n_0}(t)\overline{x_{m_0}(s)}\right)_{L_2([a,b]\times[a,b])} =$$

$$= \int_a^b\int_a^b \left[x_n(t)\overline{x_m(s)}\right]\cdot\overline{\left[x_{n_0}(t)\overline{x_{m_0}(s)}\right]}\,dt\,ds =$$

$$= \left[\int_a^b x_n(t)\overline{x_{n_0}(t)}\,dt\right]\cdot\left[\int_a^b x_{m_0}(s)\overline{x_m(s)}\,ds\right] =$$

$$= \left(x_n(t), x_{n_0}(t)\right)_{L_2[a,b]} \cdot \left(x_{m_0}(s), x_m(s)\right)_{L_2[a,b]} =$$

$$= \delta_{n,n_0} \cdot \delta_{m_0,m} = \begin{cases} 1, \text{ если } n=n_0 \text{ и } m=m_0 \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Символы Кронекера

Значит, $\{x_n(t)\overline{x_m(s)}\}$ ортонормирована в $L_2([a,b]\times[a,b])$. Чтобы убедиться в её полноте, нужно проверить, что её нельзя пополнить, т. е. что всякая ф-ция ~~...~~ $g \in L_2([a,b]\times[a,b])$, ортогональная каждой ф-ции $x_n(t)\overline{x_m(s)}$, обязана быть равной нулю. Итак,

$$0 = \left(g(t,s), x_n(t)\overline{x_m(s)}\right)_{L_2([a,b]\times[a,b])} =$$

$$= \int_a^b\int_a^b g(t,s)\overline{x_n(t)\overline{x_m(s)}}\,dt\,ds =$$

$$= \int_a^b \left[\int_a^b g(t,s)x_m(s)ds\right]\overline{x_n(t)}\,dt =$$

$$= \left(\int_a^b g(t,s)x_m(s)ds, x_n(t)\right)_{L_2[a,b]}.$$

Поскольку это равенство справедливо $\forall n$, а последовательность ф-ций $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ полна в $L_2[a,b]$, то

$$\int_a^b g(t,s)x_m(s)ds = 0$$

как функция $t \mapsto \int_a^b g(t,s)x_m(s)ds$ пр-ва $L_2[a,b]$, т.е. равняется нулю для почти всех $t\in[a,b]$.

Тогда $\forall m = 1, 2, \ldots$

$$0 = \int_a^b g(t,s) x_m(s)\, ds = \int_a^b \overline{\overline{g(t,s)} \cdot \overline{x_m(s)}}\, ds =$$

$$= \left(\overline{g(t,s)}, x_m(s)\right)_{L_2[a,b]} \quad \text{для почти всех } t.$$

Поскольку последовательность функций $x_1(s), x_2(s), \ldots, x_m(s) \ldots$ полна в $L_2[a,b]$, то

$$\overline{g(t,s)} = 0 \quad \text{для почти всех } t, s \in [a,b],$$

т. е. $g(t,s) = 0$ как ф-ция из-ва $L_2\big([a,b]\times[a,b]\big)$. Это и означает, что система $\{x_n(t)\overline{x_m(s)}\}$ полна в $L_2\big([a,b]\times[a,b]\big)$.

Поскольку функция $K(t,s)$ — ядро оператора A — лежит в $L_2\big([a,b]\times[a,b]\big)$, она разлагается в ряд по полной ортонормированной системе $\{x_n(t)\overline{x_m(s)}\}$:

$$K(t,s) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}\, x_n(t)\overline{x_m(s)},$$

где a_{mn} - некоторые числа (на самом деле мы знаем, что это коэффициенты Фурье функции K относительно ортонормированной системы $\{x_n(t)\overline{x_m(s)}\}$).

Для каждого натурального числа N положим

$$K_N(t,s) = \sum_{m,n=1}^{N} a_{mn}\, x_n(t)\, \overline{x_m(s)}$$

и обозначим через A_N оператор Гильберта-Шмидта с ядром K_N.

II шаг Изучение св-в операторов A_N.

Убедимся, что

(1) $\forall N$ A_N отображает $L_2[a,b]$ в $L_2[a,b]$ и $\|A_N\| < +\infty$.

(2) $\forall N$ $\dim(\operatorname{im} A_N) < +\infty$

(3) $A_N \to A$ при $N \to \infty$.

Как только св-ва (1)-(3) будут доказаны, мы сможем утверждать, что оператор A компактен на основании определения компактного оператора.

1 $\forall N$ ф-ция $K_N(t,s)$ является конечной линейной комбинацией ф-ций $x_n(t)\overline{x_m(s)}$ пр-ва $L_2([a,b]\times[a,b])$, а значит, сама лежит в этом пр-ве. Следовательно, $\|K_N\|_{L_2([a,b]\times[a,b])} < +\infty$.

Поэтому оператор A_N является оператором Гильберта-Шмидта. По доказанному выше он отображает $L_2[a,b]$ в $L_2[a,b]$ и $\|A_N\| < +\infty$.

Св-во (1) доказано.

② Ясно, что $\forall N$

$$\mathrm{im}\, A_N \subset \underbrace{\mathrm{Lin}}_{\text{линейная оболочка}} \left\{ x_n(t)\,\overline{x_m(s)} \right\}_{m,n=1,\dots,N}$$

Поэтому $\dim(\mathrm{im}\, A_N) \leq \dim \mathrm{Lin} \left\{ x_n(t)\,\overline{x_m(s)} \right\}_{m,n=1,\dots,N} \leq$

$$\leq N^2 < +\infty.$$

③ $A_N \xrightarrow[N\to\infty]{} A \iff \|A - A_N\| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$, а это следует из

$$\|A - A_N\| \leq \|K(t,s) - K_N(t,s)\|_{L_2([a,b]\times[a,b])} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

потому, что $K_N \xrightarrow[N\to\infty]{} K \iff K(t,s) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}\, x_n(t)\,\overline{x_m(s)} =$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{m,n=1}^{N} a_{mn}\, x_n(t)\,\overline{x_m(s)} = \lim_{N\to\infty} K_N(t,s).$$

Теорема о компактности оператора Г-Ш доказана.

<u>Теорема</u> (об операторе, сопряжённом оператору Гильберта-Шмидта). Пусть A — оператор Г.-Ш. с ядром $K(t,s)$. Тогда сопряжённый ему оператор A^* также является оператором Г.-Ш., причём его ядро $K^*(t,s)$ удовлетворяет соотношению

$$K^*(t,s) = \overline{K(s,t)},$$

где черта означает комплексное сопряжение.

Д-во. Определим оператор $B: L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ формулой

$$(By)(t) = \int_a^b \overline{K(s,t)}\, y(s)\,ds,$$

где $y \in L_2[a,b]$. Поскольку $\|\overline{K(s,t)}\|_{L_2([a,b]\times[a,b])} =$

$$= \int_a^b\int_a^b |\overline{K(s,t)}|^2 ds\,dt = \int_a^b\int_a^b |K(s,t)|^2 ds\,dt = \|K(s,t)\| < +\infty,$$

то B является оператором Гильберта-Шмидта.

Убедимся, что $\forall x, y \in L_2[a,b]$ справедливо равенство $(Ax, y)_{L_2[a,b]} = (x, By)_{L_2[a,b]}$.

Это равенство будет означать, что $B = A^*$ и тем самым теорема будет доказана.

Итак, $(Ax,y)_{L_2[a,b]} = \int_a^b (Ax)(t)\overline{y(t)}\,dt =$

$$= \int_a^b \left[\int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds\right]\overline{y(t)}\,dt =$$

сменили порядок интегрирования

$$= \int_a^b \left[\int_a^b K(t,s)\,\overline{y(t)}\,dt\right] x(s)\,ds =$$

$s = \tau$, $t = \sigma$

$$= \int_a^b x(\tau)\left[\int_a^b K(\sigma,\tau)\,\overline{y(\sigma)}\,d\sigma\right] d\tau =$$

$\tau = t$, $\sigma = s$

$$= \int_a^b x(t)\,\overline{\underbrace{\left[\int_a^b \overline{K(s,t)}\,y(s)\,ds\right]}_{(By)(t)}}\,dt =$$

$$= \int_a^b x(t)\,\overline{(By)(t)}\,dt = (x, By)_{L_2[a,b]}.$$

Теорема об операторе, сопряжённом к Г-Ш. доказана.