8.3 Решение интегральных уравнений с вырожденным ядром

Опр. Говорят, что ядро $K:[a,b]\times[a,b]\to\mathbb{C}$ является вырожденным, если $\exists n$ – натуральное число и $\forall j=1,2,\dots,n$ существуют функции $P_j, Q_j \in L_2[a,b]$ такие, что

$$K(t,s)=\sum_{j=1}^{n} P_j(t)\,Q_j(s). \qquad (*)$$

Замечание: Без ограничения общности можно считать, что набор функций $P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t)$ является линейно независимым и при этом набор функций $Q_1(s), Q_2(s), \dots, Q_n(s)$ тоже является линейно независимым.

В самом деле, допустим что какая-то функция P_j линейно выражается через остальные. Пусть, для определенности, $j=n$. Тогда $P_n(t)=\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j P_j(t)$, где α_j – некоторые числа. Следовательно, в этом случае вырожденное ядро $(*)$ можно записать с использованием меньшего числа слагаемых:

$$K(t,s)=\sum_{j=1}^{n} P_j(t)Q_j(s)=\sum_{j=1}^{n-1} P_j(t)Q_j(s)+\left[\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j P_j(t)\right]Q_n(s)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n-1} P_j(t)\left[Q_j(s)+\alpha_j Q_n(s)\right]=\sum_{j=1}^{n-1} P_j(t)\tilde{Q}_j(s),$$

где $\tilde{Q}_j(s)=Q_j(s)+\alpha_j Q_n(s)$.

Исключая таким образом линейно зависимые функции как из набора $P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t)$, так и из набора $Q_1(s), Q_2(s), \dots, Q_n(s)$, мы будем каждый раз уменьшать количество слагаемых в выражении

$$K(t,s) = \sum_{j=1}^{n} P_j(t)\, Q_j(s) \qquad (*)$$

для вырожденного ядра. Ясно, что за конечное число шагов мы дойдем до ф-лы $(*)$, содержащей минимальное число слагаемых. При этом набор функций $P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t)$ будет линейно независимым и набор ф-ий $Q_1(s), \dots Q_n(s)$ тоже будет линейно независимым. В дальнейшем считаем, что такой переход к линейно независимым $P_1, \dots, P_n$ и $Q_1, \dots, Q_n$ уже осуществлен изначально.

В этом пункте мы рассмотрим один метод решения интегрального ур-ния Фредгольма II рода

$$x(t) = \int_a^b K(t,s)\, x(s)\, ds + f(t) \qquad (1)$$

с вырожденным ядром $K(t,s) = \sum\limits_{j=1}^{n} P_j(t)\, Q_j(s)$.

Подставив выражение для ядра в ~~ф~~ ур-ние (1) получим

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} P_j(t) \underbrace{\int_a^b Q_j(s)\, x(s)\, ds}_{\text{"}q_j\text{" - это некоторое число} \equiv \left\{\substack{\text{неопределённый} \\ \text{неизв. коэфф.}}\right.} + f(t)$$

Тем самым мы теперь знаем решение $x(t)$ „с точностью до неопределённых коэффициентов" $q_1, q_2, \ldots, q_n$:

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} q_j P_j(t) + f(t). \qquad (2)$$

Подставим это выражение в ур-ние (1):

$$\sum_{j=1}^{n} q_j P_j(t) + \cancel{f(t)} =$$

$$= \int_a^b \left[\sum_{j=1}^{n} P_j(t) Q_j(s)\right] \cdot \left[\sum_{k=1}^{n} q_k P_k(s) + f(s)\right] ds + f(t) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} P_j(t) \left[\sum_{k=1}^{n} q_k \underbrace{\int_a^b Q_j(s) P_k(s)\, ds}_{\substack{\| \text{обоз} \\ a_{jk}}} + \underbrace{\int_a^b Q_j(s) f(s)\, ds}_{\substack{\| \text{обоз} \\ b_j}}\right] + \cancel{f(t)}.$$

Эти числа нам известны, поскольку известны Q_j, P_k и f.

Поскольку ф-ции $P_1(t), \ldots, P_n(t)$ линейно независимы, то $\forall j = 1, \ldots, n$ выполняется рав-во

$$q_j = \sum_{k=1}^{n} q_k a_{jk} + b_j. \qquad (3).$$

Таким образом, мы свели решение интегрального ур-ния (1) к решению системы алгебраических уравнений (3): решив последнюю мы по ф-ле (2) получим решение интегрального уравнения (1) и наоборот — если система (3) не имеет решения, то и интегральное ур-ние (1) не имеет решения.

Замечание. Если ядро интегрального уравнения Фредгольма II рода невырожденно, но лежит в $L_2([a,b]\times[a,b])$, то мы можем разложить его в этом ур-ве по какой-нибудь ортонормированной системе вида $\{x_n(t)\overline{x_m(s)}\}_{n,m=1,2,\dots}$:

$$K(t,s) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \alpha_{nm}\, x_n(t)\overline{x_m(s)}$$

а затем можем отбросить все члены с большими номерами, положив

$$K_N(t,s) = \sum_{m,n=1}^{N} \alpha_{nm}\, x_n(t)\overline{x_m(s)}.$$

Это ядро уже вырожденное. Значит, мы можем решить уравнение

$$x(t) = \int_a^b K_N(t,s)x(s)\,ds + f(t) \qquad (4)$$

указанным выше способом. Поскольку $K_N \to K$ при $N\to\infty$, то интуитивно мы можем ожидать что решение ур-ния (4) при $N\to\infty$ сходится к решению исходного уравнения

$$x(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds + f(t).$$

Это реальный метод приближённого (численного) решения ур-ний Фредгольма II рода.