

8.4) Альтернатива Фредгольма

Альтернатива - это необходимость выбора между двумя или несколькими взаимоисключающими друг друга возможностями.

Ивар Фредгольм (1866-1927) - шведский математик, наиболее известный своими работами по теории интегральных уравнений и теории операторов.

Пусть H - гильбертово пространство, $A: H \rightarrow H$ - компактный оператор, A^* - его сопряжённый. Взаимность неоднородного уравнения

$$x - Ax = f \quad (H)$$

устанавливается с помощью однородного уравнения

$$x - Ax = 0 \quad (O)$$

и сопряжённого однородного уравнения

$$y - A^*y = 0 \quad (CO)$$

следующей теоремой:

Теорема (альтернатива Фредгольма): Для ур-ния (H) возможны два случая:

(I). Однородное ур-ние (O) имеет только нулевое решение.

При этом сопряжённое однородное ур-ние (CO) также имеет только нулевое решение, а неоднородное ур-ние (H) имеет единственное решение для любого правого члена f .

(II). Однородное ур-ние (O) имеет n линейно независимых решений $x_1, \dots, x_n$, где n - целое положительное число. При этом сопряжённое однородное ур-ние (CO) имеет ровно n линейно независимых решений.

$y_1, \dots, y_n$, а для разрешимости неоднородного уравнения (н) необходимо и достаточно, чтобы

$$(y_k, f) = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

где (y_k, f) обозначает скалярное произведение векторов y_k и f в пр-ве H . При выполнении последних условий общее решение неоднородного уравнения (н) имеет вид

$$x = x_0 + c_1 x_1 + \dots + c_n x_n,$$

где x_0 - частное (т.е. "какое-нибудь") решение неоднородного ур-ния (н); $x_1, \dots, x_n$ - линейно независимые решения однородного уравнения (о); $c_1, \dots, c_n$ - произвольные числа.

Замечание: Альтернатива Фредгольма, в частности, утверждает, что однородное ур-ние (о) не может иметь бесконечного количества линейно независимых решений.

Замечание: Поскольку оператор Гильберта-Шмидта компактен (см. п. 8.2), то альтернатива Фредгольма имеет точное отражение в интегральных ур-ниях.

Д-во альтернативы Фредгольма для ур-в-дений только для оператора Гильберта-Шмидта, приведем далее считать, что у нас вырожденное ядро:

$$K(t, s) = \sum_{j=1}^m P_j(t) Q_j(s). \quad (8)$$

Из п. 8.3 мы знаем, что решение неоднородного уравнения

$$x(t) = \int_a^b K(t,s) x(s) ds + f(t) \quad (H)$$

с вырожденным ядром (с) эквивалентно решению линейной алгебраической системы ур-ний

$$q_j = \sum_{k=1}^m a_{jk} q_k + b_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (1)$$

$$\text{где } a_{jk} = \int_a^b Q_j(s) P_k(s) ds \quad (2)$$

$$b_j = \int_a^b Q_j(s) f(s) ds. \quad (3)$$

Из г-вы (3) ясно, что решение однородного ур-ния

$$x(t) = \int_a^b K(t,s) x(s) ds \quad (0)$$

эквивалентно решению однородной системы

$$q_j = \sum_{k=1}^m a_{jk} q_k, \quad j = 1, \dots, m. \quad (4)$$

Из п. 8.2 (см. теорему об операторе, сопряженном к оператору Гильберта-Шевинга) мы знаем, что A^* имеет ядро

$$K^*(t,s) = \overline{K(s,t)} = \sum_{j=1}^m \overline{Q_j(t)} \cdot P_j(s).$$

Поэтому решение сопряженного однородного ур-ния

$$y(t) = \int_a^b K^*(t,s) y(s) ds \quad (5)$$

(с)

~~для~~ свиваемости решения однородной системы

$$p_j = \sum_{k=1}^m a_{jk}^* p_k, \quad j=1, \dots, m \quad (6)$$

где a_{jk}^* ~~вычисляются~~ ~~по той же~~ ~~г-ле~~ (2) по которой мы вычисляем a_{jk} :

$$a_{jk} = \int_a^b Q_j(s) P_k(s) ds \Rightarrow a_{jk}^* = \int_a^b \overline{P_j(s)} \cdot \overline{Q_k(s)} ds = \overline{a_{kj}}.$$

Остаётся написать что такое p_j в г-ле (6):

это коэффициенты в разложении решения сопряжённого однородного ур-ния $(co) = (5)$ по г-нам $\overline{Q_k(t)}$, т.е. $y(t) = \sum_{k=1}^m p_k \overline{Q_k(t)}$.

Теперь мы видим, во всем рассуждении возможность (I), то (6) имеет только нулевое решение $\Leftrightarrow$ система (4)

$$q_j = \sum_{k=1}^m a_{jk} q_k \text{ или } Mq = 0, \text{ где } M = \delta_{jk} - a_{jk}$$

имеет только нулевое решение $\Leftrightarrow \det M = \det (\delta_{jk} - a_{jk}) \neq 0$. Это будет означать, что

Определим матрицу $M^* = \delta_{kj} - \overline{a_{kj}}$,

сопряжённой к M транспонированной и
взяв комплексное сопряжение, тогда
останем от нуля:

$$\det(\delta_{jk} - \overline{a_{jk}})^* = \det M^* = \det(\delta_{kj} - \overline{a_{kj}}) \neq 0.$$

Поэтому (6) и (6a) имеют только нулевое решение,
а (1) и (н) имеют единственное решение при
любой правой части. — как и утверждалось в т-ме.

Пусть теперь рассмотрим возможность (II),
т.е. (6) имеет ~~n~~ ⁿ линейно независимых решений
 $x_1, \dots, x_n \Leftrightarrow$ (4) имеет n линейно независимых решений

$$q_j = \sum_{k=1}^m a_{jk} q_k ; j = 1, \dots, m$$

$q^1 = (q_1^1, \dots, q_m^1), \dots, q^n = (q_1^n, \dots, q_m^n)$. Они связаны
с $x_1, \dots, x_n$ следующим образом $x_k(t) = \sum_{j=1}^n q_j^k P_j(t)$.

$\Leftrightarrow$ ранг матрицы $M = (\delta_{jk} - a_{jk})$ равен $m - n$.

$\Leftrightarrow$ ранг эрмитовой сопряжённой ей матрицы
 $M^* = (\delta_{kj} - \overline{a_{kj}})$ тоже равен $m - n$.

$\Leftrightarrow$ следствие (6) $P_j = \sum_{k=1}^m a_{jk}^* P_k$ или $P_j = \sum_{k=1}^m \overline{a_{kj}} P_k$

имеет ровно $m - n$ линейно независимых решений,
которые все обозначим через $P^1 = (P_1^1, \dots, P_m^1), \dots$

$$p^n = (p_1^n, \dots, p_m^n).$$

$$\Leftrightarrow (co) \quad y(t) = \int_a^b K^*(t, s) y(s) ds \quad \text{имеет } m-n$$

линейно независимых решений $y_i(t) = \sum_{k=1}^m p_k^i \overline{Q_k}(t)$,
как и утверждалось в теореме.

Теперь проверим, ~~выполняется ли~~ это условие
(y_k, f) = 0 $\forall k=1, \dots, n$ является необходимым и
достаточным для разрешимости неоднородного ур-ня (н)

$$x(t) = \int_a^b K(t, s) x(s) ds + f(t).$$

Мы уже знаем, что (н) разрешимо если и только если
разрешима система (1), т.е.

$$q_j = \sum_{k=1}^m a_{jk} q_k + b_j, \quad (1)$$

$$\text{где } a_{jk} = \dots \quad \text{и} \quad b_j = \int_a^b Q_j(s) f(s) ds.$$

Из линейной алгебры (см. таковую теорему
"Альтернатива Фредгольма") известно, что (1) разрешима
если и только если вектор с компонентами $(b_1, \dots, b_m)$
ортогонален каждому решению сопряженной однородной
системы. Мы обозначим эту сопряженную однородную
систему через (6):

$$p_j = \sum_{k=1}^m a_{jk}^* p_k \quad \text{или} \quad p_j = \sum_{k=1}^m \overline{a_{kj}} p_k,$$

а её линейно независимые решения запишем так:
 $p^1 = (p_1^1, \dots, p_m^1), \dots, p^n = (p_1^n, \dots, p_m^n).$

При этом условие ортогональности вектора $(b_1, \dots, b_m)$
и вектора p^i имеет вид

$$\sum_{k=1}^m b_k \overline{p_k^i} = 0.$$

Но это условие ортогональности эквивалентно ортогональности n -ки $f(t)$ в (n) и любого решения однородного сопряжённого уравнения (со)

$$y_i(t) = \sum_{k=1}^m p_k^i \overline{Q_k(t)}.$$

В самом деле:

$$\begin{aligned} (f, y_i) &= \int_a^b f(t) \overline{y_i(t)} dt = \int_a^b f(t) \overline{\sum_{k=1}^m p_k^i Q_k(t)} dt = \\ &= \sum_{k=1}^m \overline{p_k^i} \underbrace{\int_a^b f(t) Q_k(t) dt}_{"b_k"} = \sum_{k=1}^m \overline{p_k^i} b_k = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, условие разрешимости выполнено.

Последнее утверждение теоремы об общем виде

$$x = x_0 + c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

решения неоднородного уравнения (n) является общим решением всех линейных уравнений и систем ур-ний.

Его доказываем в линейной алгебре и дифференциальных уравнениях и здесь я его дока-ть не смогу.