

(8.5) Уравнения с малым параметром.
Ряд Неймана. Метод последовательных приближений.

В этом пункте мы изучим интегральные уравнения Фредholm II рода с параметром μ

$$x(t) = \mu \int_a^b K(t,s) x(s) ds + f(t) \quad \text{или} \quad x = \mu A x + f,$$

где A - оператор Гильберта - Шмидта.

Если $\mu = 0$, то "решение" очевидно: $x(t) = f(t)$. Интуиция, основанная на "соображениях непрерывности", подсказывает, что при любом μ , достаточно близком к нулю, уравнение $x = \mu A x + f$ тоже должно иметь единственное решение.

Чтобы разобраться с этой интуитивной подсказкой, вспомним теорему Неймана из раздела "Операторы в гильбертовых пространствах": Если H - гильбертово пр-во, $B: H \rightarrow H$ - линейный оператор, такой что $\|B\| < 1$, то оператор $I - B$ обратим, $\text{dom } (I - B)^{-1} = H$ и имеет место равенство

$$(I - B)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B^n,$$

где $B^0 = I$; и $B^{n+1} = B \cdot B^n \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$

Как мы знаем, оператор Гильберта - Шмидта

$$(Ax)(t) = \int_a^b K(t,s) x(s) ds$$

ограничен и $\|A\| \leq \|K\|_{L_2([a,b] \times [a,b])} = \left\{ \int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2 dt ds \right\}^{1/2} < +\infty$.

Поэтому для всех $\mu \in \mathbb{C}$ таких, что $|\mu| < 1/\|A\|$ оператор $I - \mu A$ обратим (ведь $\|\mu A\| < 1$) и может быть представлен в виде ряда $(I - \mu A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n A^n$.

Следовательно, для $|\mu| < \frac{1}{\|A\|}$ решение уравнения

$x = \mu Ax + f$ может быть получено так:

$$x - \mu Ax = f, (I - \mu A)x = f, x = (I - \mu A)^{-1} f = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n A^n f = f + \mu A f + \mu^2 A^2 f + \dots \quad \text{— ряд Неймана.}$$

Другим способом, при $|\mu| < 1/\|A\|$ решение ур-ния $x = \mu Ax + f$ может быть получено в виде бесконечного ряда $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$, где $x_0 = f$, а каждый последующий член получается из предыдущего по рекуррентной ф-ле $x_{n+1} = \mu A x_n$. Такой способ нахождения решения называется методом последовательных приближений.

При этом intuitивно ясно, что частичная сумма $\sum_{n=0}^N x_n$ ряда $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ может рассматриваться как приближенное решение уравнения $x = \mu Ax + f$. И это действительно является в основе одного из компьютерных приближенных методов решения интегральных уравнений.

Вернемся к ряду Неймана $\sum_{n=0}^{\infty} \mu^n A^n$. Для его построения нужно находить A^n при любом n .

Опр. Ядро оператора A^n называется повторным ядром и обозначается $K_n(t, s)$.

Теорема (о повторном ядре оператора Гильберта-Шмидта):
Если A — оператор Гильберта-Шмидта с ядром $K(t, s)$, то $\forall n = 2, 3, \dots$ оператор A^n является оператором Гильберта-Шмидта и для повторных ядер справедлива ф-ла

$$K_n(t, s) = \int_a^b K(t, r) K_{n-1}(r, s) dr. \quad (1)$$

Док-во: Будем идти по индукции. Допустим, что для некоторого $n=2,3,\dots$ ядро $K_{n-1}(t,s)$ лежит в $L_2([a,b] \times [a,b])$ (т.е. допустим, что оператор A^{n-1} является оператором Гильберта-Шмидта) и убеждаемся в справедливости формулы (1) и в том, что $K_n(t,s)$ лежит в $L_2([a,b] \times [a,b])$. В следующем главе, где (1) вводится из следующего выражения:

$$\begin{aligned} \int_a^b K_n(t,s)x(s)ds &= (A^n x)(t) = A(A^{n-1}x)(t) = \\ &= \int_a^b K(t,r)[A^{n-1}x](r)dr = \int_a^b K(t,r)\left[\int_a^b K_{n-1}(r,s)x(s)ds\right]dr = \\ &= \int_a^b \left[\int_a^b K(t,r)K_{n-1}(r,s)dr\right]x(s)ds \Rightarrow K_n(t,s) = \int_a^b K(t,r)K_{n-1}(r,s)dr. \end{aligned}$$

Теперь убеждаемся, что $K_n \in L_2([a,b] \times [a,b])$:

$$\begin{aligned} \|K_n\|_{L_2([a,b] \times [a,b])}^2 &= \int_a^b \int_a^b |K_n(t,s)|^2 dt ds = \int_a^b \int_a^b \left| \int_a^b K(t,r)K_{n-1}(r,s)dr \right|^2 dt ds \stackrel{\text{по ф-ле (1)}}{=} \\ &\leq \int_a^b \int_a^b \left[\int_a^b |K(t,r)|^2 dr \cdot \int_a^b |K_{n-1}(r,s)|^2 dr \right] dt ds \stackrel{\text{неравенство Коши-Буняковского}}{=} \\ &= \int_a^b \int_a^b |K(t,r)|^2 dr dt \cdot \int_a^b \int_a^b |K_{n-1}(r,s)|^2 dr ds = \\ &= \|K\|_{L_2([a,b] \times [a,b])}^2 \cdot \|K_{n-1}\|_{L_2([a,b] \times [a,b])}^2 < +\infty, \end{aligned}$$

УТД.

Используя эту формулу, мы сможем записать ряд
Клейна в виде:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n A^n f = f + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n A^n f = \\ &= f + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \int_a^b K_n(t, s) f(s) ds = f(t) + \int_a^b R(t, s; \mu) f(s) ds, \end{aligned}$$

где использовано обозначение

$$R(t, s; \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n K_n(t, s).$$

Интегральный оператор $\int_a^b R(t, s; \mu) f(s) ds$ называется интегральным
результантом исходного оператора $\int_a^b K(t, s) x(s) ds$, а функция
 $R(t, s; \mu)$ называется результирующей ядром оператора A .