

8.6) Интегральные уравнения с симметричными ядрами.
Теорема Гильберта-Шейдта для интегральных уравнений.
Разложение решения интегрального уравнения по
собственным функциям ядра.

Теория интегральных уравнений имеет своим источником корни операторов в гильбертовых пр-вах (кстати, например, с корнем ядра). Все корни как-то естественно развиваются взаимно обогащая друг-друга постановками задач и методами решения. В каждой из этих теорий своеобразие свое проявляет. До сих пор мы не рассмотрели теорию корней операторов в гильбертовых пространствах. Сейчас познакомимся с аналогичной теорией корней интегральных ур-ний. Без такого знакомства тем и все, кому в будущем потребуются углубить свои знания по интегральным уравнениям, будет трудно читать "толстые" книги.

Теория операторов
H-гильбертово пр-во
B: H → H ссим. оператор

Интегральные ур-ния
 $A: L_2[a, b] \rightarrow L_2[a, b]$ - оператор Гильберта-Шейдта с ядром $K(t, s)$.

Опр: $x \in H$ наз-ся собственным вектором оператора B, если $x \neq 0$ и $Bx = \lambda x$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$ (кот. наз-ся собственным значением оператора B).

① Опр: $x \in L_2[a, b]$ называют собственной ф-ей ур-ия $x = \mu Ax$ (или собственной ф-ей ядра K), если $x \neq 0$ и $x = \mu Ax$ для некоторого $\mu \in \mathbb{C}$ (кот. наз-ся характеристическим значением ур-ия $x = \mu Ax$ или харак. значением ядра K).

Другими словами: $\lambda \neq 0$ является собственным значением оператора $A \Leftrightarrow \mu = 1/\lambda$ является характеристическим значением ур-ия $x = \mu Ax$.

Теория операторов
 H -гильбертово пр-во
 $B: H \rightarrow H$ - лин. оператор

Интегральные ур-ния
 $A: L_2[a, b] \rightarrow L_2[a, b]$ - оператор Тильберга-Шмидта с ядром $K(t, s)$

п. 7.13: Теорема (о точном спектре самосопряженного ограниченного оператора): Если $B: H \rightarrow H$ - самосопряженный ограниченный, то все собственные числа B вещественны, а собственные векторы, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны друг другу. ②

Если ядро K симметрично (т.е. $K(t, s) = K(s, t)$), то все его характеристические значения вещественны, а собственные функции, отвечающие разным характеристическим значениям, ортогональны друг другу.

п. 7.14: Теорема (о существовании базиса из собственных векторов компактного самосопряженного оператора): $\dim H \neq 0$ и $B: H \rightarrow H$ - компактный самосопряженный оператор $\Rightarrow$ в H существует ортонормированный базис из собственных векторов оператора B . ③

Аналогом т-ем п. 7.14 является теорема Тильберга-Шмидта для интегральных уравнений с симметричным ядром (см. лекции).

Следствие т-ем 7.14: собственные значения компактного самосопряженного оператора B можно переупорядочить (с учетом кратности) в порядке убывания модулей: $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$ ④

Следствие т-ем Тильберга-Шмидта для интегральных ур-ний с симметричным ядром: характеристические значения симметричного ядра можно переупорядочить в порядке убывания модулей: $|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \dots$

В частности, каждому собственному значению $\lambda \neq 0$ отвечает лишь конечное число линейно независимых собственных векторов и $\forall \varepsilon > 0$ число собственных значений, удов. пер-ву $|\lambda| > \varepsilon$, конечно.

В частности, характеристическому значению симметричного ядра отвечает лишь конечное число линейно независимых собственных функций ядра и $\forall \varepsilon > 0$ число характеристических значений ядра, удовлетворяющих пер-ву $|\mu| > \varepsilon$, конечно.

Теория операторов:
 H - гильбертово п-во,
 $B: H \rightarrow H$ - лин. оператор

Интегральные уравнения
 $A: L_2[a, b] \rightarrow L_2[a, b]$ - оператор Тиль-
 берга-Шмидта с ядром K

Опр. Говорят, что $x \in H$ имеет
 в образе оператора A , если
 $\exists y \in H: x = Ay$,
 Доказ: $x \in \text{im } A$.

⑤ Опр: Говорят, что f -ия $f \in L_2[a, b]$
 представима через ядро $K(t, s)$, если
 $\exists g \in L_2[a, b]$ такая, что

$$f(t) = \int_a^b K(t, s) g(s) ds,$$

 т.е. если $f \in \text{im } A$.

Задача (на св. в 4): Привести пример компактного
 самосопряженного оператора $B: H \rightarrow H$, для которого существует
 бесконечно много линейно независимых собственных векторов,
 отвечающих собственному значению $\lambda = 0$.

Теорема ③ (Тильберга-Шмидта для интегральных уравнений
 с симметричным ядром). Если $f \in L_2[a, b]$ представима
 через симметричное ядро $K \in L_2([a, b] \times [a, b])$, то она
 имеет вид разложения в ряд

$$f(t) = \sum_n f_n x_n(t),$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ - ортонормированная полнота
 собственных функций ядра $K(t, s)$, а коэффициенты f_n
 задаются равенством

$$f_n = \int_a^b f(t) \overline{x_n(t)} dt = (f, x_n)_{L_2[a, b]},$$

т.е. f_n - коэффициенты Фурье f -ии f относительно ортонор-
 мированной системы $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$.

Замечание: Другим следствием, в образе оператора A
 с ядром K существует ортонормированная база из
 собственных функций ядра $K(t, s)$ (т.е. такой базис
 существует в $\text{im } A$, но не доказано, что он существует в $L_2[a, b]$).

Д-во Т-лем Тильберга-Мессига для интегральных уравнений с симметричным ядром.

Обозначим $у$ $A: L_2[a, b] \rightarrow L_2[a, b]$ оператор Тильберга-Мессига с ядром K . Тогда A — компактный самосопряженный оператор (см. н. 8.2). По Т-леме н. 7.14 в $L_2[a, b]$ существует ортонормированный базис $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ из собственных векторов оператора A (т.е. $Ay_n = \lambda_n y_n, \lambda_n \in \mathbb{C}$).

Подтвердим у последовательности $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ вектор y_n , если $\lambda_n = 0$; и переименуем эту последовательность так: $x_1, x_2, \dots, x_m, \dots$. Тогда:

- 1) очевидно, последовательность $x_1, x_2, \dots, x_m, \dots$ содержит лишь конечное число нулей;
- 2) $\forall m$ x_m является собственной функцией ядра K , отвечающей характеристическому значению $\mu_m = \frac{1}{\lambda_m}$:

$$Ax_m = \lambda_m x_m \Leftrightarrow x_m = \frac{1}{\lambda_m} Ax_m.$$

- 3). последовательность $x_1, x_2, \dots, x_m, \dots$ образует ортонормированный базис в $\text{im } A$:

$$\forall x \in \text{im } A \quad \exists y \in L_2[a, b] : x = Ay, \text{ а значит}$$

$$x = Ay = A\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n Ay_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n y_n =$$

то есть разложение
 $y \in L_2[a, b]$ по базису
 $y_1, \dots, y_n, \dots$ в $L_2[a, b]$

$$\text{ведь } Ay_n = \lambda_n y_n$$

$$= \sum_m \lambda_m x_m$$

$\Rightarrow$ любой $x \in \text{im } A$ разлагается по $x_1, \dots, x_m, \dots$

Не стал писать K
Самостоятельно, у которых $\lambda_n = 0$

$x_1, \dots, x_m, \dots$ — базис в $\text{im } A$.

Осталось найти f -ую для f_m в разложении

$$f = \sum_m f_m x_m$$

Учитывая то, что скалярно на x_n и воспользуясь ортонормированностью (т.е. тем, что $(x_m, x_n) = \delta_{mn}$ — символ Кронекера):

$$(f, x_n) = \sum_m f_m (x_m, x_n) = \sum_m f_m \delta_{mn} = f_n. \text{ УД.}$$

Применим доказанную теорему к решению неоднородного ур-ния $x = \mu Ax + f$, где A — линейный оператор Гильберта-Шеврера с симметричными ядрами K . Пусть $x_1, \dots, x_n, \dots$ — ортонормированная последовательность собственных функций ядра K и $x_n = \mu_n Ax_n$.

Если x — решение ур-ния $x = \mu Ax + f$, то $x - f = \mu Ax$, а значит $x - f$ представлено через ядро K и имеет вид разложения в ряд

$$x - f = \sum_n a_n x_n.$$

Подставив это в ур-ние $x = \mu Ax + f$, получим

$$\begin{aligned} f + \sum_n a_n x_n &= x = \mu Ax + f = \mu A \left(\sum_n a_n x_n + f \right) + f = \\ &= \mu \sum_n a_n \underbrace{Ax_n}_{\mu_n^{-1} x_n} + \mu Af + f = \mu \sum_n \mu_n^{-1} a_n x_n + \mu Af + f. \end{aligned}$$

или

$$\sum_n (a_n - \frac{\mu}{\mu_n} a_n) x_n = \underbrace{\mu Af}_{\text{на } f\text{-ую}} = \mu \sum_n b_n x_n, \text{ где}$$

представление
через ядро K

$$b_n = (Af, x_n) = (f, Ax_n) = (f, \mu_n^{-1} x_n) = \mu_n^{-1} (f, x_n).$$

Значит, $a_n \left(1 - \frac{\mu}{\mu_n}\right) = \mu b_n = \frac{\mu}{\mu_n} (f, x_n)$

Т.е. $a_n = \mu \frac{(f, x_n)}{\mu_n - \mu}$, а значит,

$$x - f = \sum_n a_n x_n \Rightarrow x = f + \mu \sum_n \frac{(f, x_n)}{\mu_n - \mu} x_n$$

$$\Rightarrow x(t) = f(t) + \mu \sum_n \frac{x_n(t)}{\mu_n - \mu} \int_a^b f(s) \overline{x_n(s)} ds$$

Это и есть разложение решения интегрального уравнения по собственным функциям ядра.