

(8.7) Разложение ядра интегрального уравнения по его собственным функциям.
Билинейная формула

Дополним теорему Гильберта-Шмидта для интегральных уравнений, доказанную в п. 8.6, более специализированным утверждением.

Теорема (о разложении ядра, или билинейная формула). Пусть $K \in L_2([a, b] \times [a, b])$ - симметричное ядро; $A: L_2[a, b] \rightarrow L_2[a, b]$ - оператор Гильберта-Шмидта с ядром K ; $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ - ортонормированный базис в $L_2[a, b]$, состоящий из собственных векторов оператора A (так, что $Ax_n = \lambda_n x_n$). Тогда $\forall n \geq 1$ для повторного ядра $K_n(t, s)$ справедлива гр-ма

$$K_n(t, s) = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j(t) \overline{x_j(s)},$$

называемая билинейной формулой.

Д-во: Из п. 8.2 (точнее, из леммы 9-ва т-мы о компактности оператора Гильберта-Шмидта) мы знаем, что для $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), \dots$ - ортонормированный базис в $L_2[a, b]$, то система функций $\{x_n(t) \overline{x_j(s)}\}_{n, j=1, 2, \dots}$ является ортонормированным базисом в $L_2([a, b] \times [a, b])$.

Из п. 8.5 (точнее, из теоремы о повторном ядре оператора Гильберта-Шмидта) мы

здесь, то $K_n(t,s) \in L_2([a,b] \times [a,b])$.

Положим $K_n(t,s)$ разлагается по ортонормированной базису $\{x_n(t) \overline{x_j(s)}\}_{n,j=1,2,\dots}$:

$$K_n(t,s) = \sum_{m,j=1}^{\infty} (K_n, x_m(t) \overline{x_j(s)}) x_m(t) \overline{x_j(s)}, \quad (*)$$

и нам остаётся только найти коэффициенты этого разложения (т.е. соответствующие коэффициенты Фурье):

$$\begin{aligned} (K_n(t,s), x_m(t) \overline{x_j(s)}) &= \int_a^b \int_a^b K_n(t,s) \overline{x_m(t) x_j(s)} dt ds = \\ &= \int_a^b \left[\int_a^b K_n(t,s) x_j(s) ds \right] \overline{x_m(t)} dt = \\ &= \int_a^b (A^n x_j)(t) \overline{x_m(t)} dt = (A^n x_j, x_m) = \\ &= (A^{n-1} (A x_j), x_m) = \lambda_j (A^{n-1} x_j, x_m) = \dots \\ &\dots = \lambda_j^n (x_j, x_m) = \lambda_j^n \delta_{jm}. \end{aligned}$$

↑
небольшая
глобальная
в повторном

↑ символ Кронекера

Подставив это выражение в (*) получим

$$K_n(t,s) = \sum_{m,j=1}^{\infty} \lambda_j^n \delta_{jm} x_m(t) \overline{x_j(s)} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^n x_j(t) \overline{x_j(s)}.$$

ИТД

Замечание. Очевидно, в бесконечной n -ке достаточно вести суммирование только по тем номерам j , для которых $\lambda_j \neq 0$.

Но тогда x_j будут собственными функциями ядра K и $\lambda_j = \frac{1}{\mu_j}$, где μ_j — характеристическое значение ядра (т.е. $x_j = \mu_j A x_j$).

Поэтому биинтегральную функцию можно записать и так:

$$K_n(t, s) = \sum_j \frac{x_j(t) \overline{x_j(s)}}{\mu_j^n},$$

где $x_1, \dots, x_n, \dots$ — максимальная ортонормированная последовательность собственных функций ядра $K(t, s)$, и $x_j(t) = \mu_j A x_j(t)$.

Мы докажем биинтегральную формулу как равенство двух функций в $L_2([a, b] \times [a, b])$. А можно ли утверждать, что правая и левая части биинтегральной ф-лы равны почти всюду? На этот вопрос отвечает следующая

Теорема Мерсера (James Mercer, 1883–1932) (без док-ва): Если ядро $K: [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывно, симметрично и все его характеристические значения (ре и мнимые) имеют конечное число отличий от нуля, то все собственные функции x_j ядра K непрерывны и справедлива биинтегральная формула

$$K(t, s) = \sum_j \frac{x_j(t) \overline{x_j(s)}}{\mu_j},$$

причем последний ряд сходится абсолютно и равномерно.

Конец курса!