Весенний семестр 2020г
Основы функционального анализа. Лектор - В.А. Александров
Конспект - В.М. Роговенко

Лекция 1 (05.02.2020)

§5. Геометрия пространств со скалярным произведением

5.1 Линейные пр-ва

Опр. Линейным пр-вом наз-ся множество L, элементы которого наз-ся векторами, в котором введены две операции: сложение $x+y$ векторов из L и умножение αx вектора $x \in L$ на число α, причём для этих операций выполнены след. аксиомы:

I 1. $x+y = y+x$, $\forall x, y \in L$
2. $(x+y)+z = x+(y+z)$, $\forall x, y, z \in L$ — Абелева группа по сложению
3. $\exists 0 \in L$: $x+0 = x$ $\forall x \in L$
4. $\forall x \in L$ $\exists (-x) \in L$: $x+(-x) = 0$

II 1. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ $\forall x \in L$ $\forall \alpha, \beta$
2. $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$ $\forall x \in L$ $\forall \alpha, \beta$
3. $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$ $\forall x, y \in L$ $\forall \alpha$
4. (унитарность) $1 \cdot x = x$ $\forall x \in L$

Примеры лин. пр-в:
(1) Множество направленных отрезков, отложенных из одной точки. Сложение - по правилу парал., умножение...
(2) $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \forall k = 1..n \ x_k \in \mathbb{C}\}$. Сложение: $x+y = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)$, Умножение: $\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$
(3) $l_2 = \{(x_1, \dots, x_n, \dots) \mid \forall k = 1, \dots, n, \dots \ x_k \in \mathbb{R}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty\}$
Сложение: покоординатно, умножение так же. Почему $x+y$ и $\alpha x \in l_2$?

$$|x_k + y_k|^2 \le (|x_k| + |y_k|)^2 = |x_k|^2 + 2|x_k||y_k| + |y_k|^2 \le$$
$$2|x_k||y_k| \le |y_k|^2 + |x_k|^2$$

$$\le 2|x_k|^2 + 2|y_k|^2 \to \sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^2 \le 2\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 < \infty \to \underline{x+y \in l_2}$$

$\alpha x \in l_2$ очевидно

(4) $C[a,b] = \{ f: [a,b] \to \mathbb{R}/\mathbb{C} \mid f$ - непр. $\}$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ и $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

(5) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ - совокупность б. у. ф.

"$S(\mathbb{R}^n)$"

Примеры множеств, не явл. лин. пр.:

(1) $S^n = \{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 = 1 \}$ - единичная сфера

(2) Пр-во Лобачевского

Опр. Бесконечный набор векторов $x, y, \dots, z, \dots \in L$ наз-ся линейно нез., если линейно нез. является любой его конечный поднабор.

Опр. Говорят, что размерность пр-ва L конечна и равна n, если в L сущ. n лин. нез. векторов и всякие $n+1$ векторов линейно зависимы. $\dim L = n$.

Опр. Говорят, что L имеет бесконечную размерность, если $\forall n$ в L найдётся n линейно нез. векторов.

Примеры:

(1) $\dim \mathbb{R}^n = \dim \mathbb{C}^n = n$

(2) $\dim l_2 = \infty$

$\forall n$ положим $x_1 = (1, 0 \dots 0)$; $x_2 = (0, 1, \dots 0, \dots), \dots x_n = (0, 0, \dots, 1, \dots)$.

Убедимся, что $x_1, x_2 \dots x_n$ лин. нез. $\alpha_1 x_1 + \dots \alpha_n x_n = 0 \to \alpha_i = 0$.

(3) $\dim C[a,b] = \dim S(\mathbb{R}^n) = \infty$

Опр. Мн-во $M \subseteq L$ наз-ся подпр-вом пр-ва L, если M является лин. пр-вом относительно тех же операций сложения и умножения.

Примеры подпр-в:

(1) в любом лин. пр-ве L есть два „тривиальная" подпр-ва = $\{0\}$ и L

(2) Совокупность всех многочленов в $C[a, b]$

(5.2) Нормированные пр-ва.

<u>Опр.</u> Пусть L - лин. пр-во. Ф-цию $\|\cdot\| : L \to [0, +\infty)$ называют нормой, если выполнены след. условия:

(1) $\forall x \in L$ имеем $\|x\| \geq 0$, причём $\|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0$ (неотриц. и невырожденность нормы)

(2) $\forall x \in L$ и $\forall \alpha$ - число $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ (положительная однородность нормы)

(3) $\forall x, y \in L$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (нер-во треугольника)

Замечание: „Норма вектора в L" есть обобщение понятия „длина направленного отрезка в R^3".

Примеры нормир. пр-в:

(1) в R^n и в C^n любая из след. ф-ций задаёт норму:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$$

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

$$\|x\|_0 = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

(2) в l_2 норму можно задать рав-вом $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2}$

(3) в $C[a, b]$ норму можно задать рав-вом $\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$

<u>Опр.</u> Говорят, что последоват. точек $x_1, \dots x_n, \dots$ линейного нормир. пр-ва L сходится к точке $x \in L$, если $\|x - x_k\| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$. $\lim_{k \to \infty} x_k = x$

<u>Опр.</u> Пусть M - мн-во в нормир. лин. пр-ве L. Говорят, что $x \in L$ явл. предельной точкой M, если $\exists x_1, \dots, x_k, \dots$, такая что

(1) $\forall k$ $x_k \in M$

(2) $\forall k$ $x_k \neq x$

(3) $x_k \xrightarrow[k \to \infty]{} x$

Опр. Замыканием мн-ва $M \subset L$ называется объединение мн-ва M и мн-ва всех предельных точек мн-ва M.
$cl\, M$ или $\overline{M}$

Примеры: Пусть $B(x_0, r) = \{x \in L \mid \|x - x_0\| < r\}$, где L - лин. норм. пр-во, $x_0 \in L$; $r \in R$, $r \geq 0$.
Пусть $\hat{x} \in L$: $\|\hat{x} - x_0\| < r$
Положим $x_k = (1 - \frac{1}{k})(\hat{x} - x_0) + x_0$
$cl\, B(x_0, r) = \{x \in L \mid \|x - x_0\| \leq r\}$. Такое мн-во наз-ся замкнутым шаром

Опр. Мн-во $M \subset L$ наз-ся замкнутым, если $cl\, M = M$.
Опр. Мн-во $M \subset L$ наз-ся плотным в L, если $cl\, M = L$

Пример. (1) Q - мн-во рац. чисел плотно в R с нормой $\|x\| = |x|$
(2) R не плотно в C
Опр. Нормированное пр-во L наз-ся сепарабельным, если в L сущ. счётное плотное подмножество
Примеры сепараб. пр-в: $R, R^n, C^n, l_2, C[a,b]$

Замечание: всё было как в матане

Задача 1: Если посл-ть $x_1 \ldots x_k$ сходится, то этот предел один, т.е. если $x_n \to x$ и $x_n \to \hat{x}$, то $x = \hat{x}$
Допустим, что $x \neq \hat{x}$. Тогда $x - \hat{x} \neq 0$ и $\|x - \hat{x}\| \neq 0$, т.е. $\underbrace{\|x - \hat{x}\|}_{\text{обозначим } \varepsilon} > 0$. Т.к. $x_k \to x$, то для $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ $\exists n_0 : \forall n \geq n_0$
$\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Т.к. $x_k \to \hat{x}$, то для $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ $\exists \hat{n}_0 : \forall n \geq \hat{n}_0$
$\|x_k - \hat{x}\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда $\forall n \geq \max(n_0, \hat{n}_0)$ имеет место неравенство: $\|\underbrace{x - \hat{x}}_{\pm x_n}\| = \|(x - x_n) + (x_n - \hat{x})\| \leq \|x - x_n\| +$
$+ \|x_n - \hat{x}\| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$. Противоречие, т.к. $= \varepsilon$

Значит, $x = \tilde{x}$.

Задача 2 (упр): Доказать, что всякое конечномерное подпр-во нормированного линейного пр-ва замкнуто.

Пример (незамкнутое подпр-во в бесконечномерном нормир. пр-ве)

Пусть $M = \{$многочлены$\}$ с нормой $\|P(x)\| = \sup\limits_{x\in[a,b]} |P(x)|$

Пусть $f(x) = \sin x$. $\forall n$ разложим её по ф-ле Тейлора с ост. членом в виде Лагранжа:

$$f(x) = \underbrace{f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}_{P_n(x)} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

где $\xi \in [0, x)$

Убедимся, что $P_0, P_1, \ldots, P_n(x)$ сходится к $f(x) = \sin x \neq$ многочлен

Вспомним, что M явл. подпр-вом в лин. нормир. пр-ве $C[a,b]$ с нормой $\|g\| = \sup\limits_{x\in[a,b]} |g(x)|$. Ясно, что $P_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ в $C[a,b]$.

В самом деле: $\|f(x) - P_n(x)\| = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - P_n(x)| =$

$$= \sup_{\substack{x\in[a,b]\\ \xi\in[0,x)}} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \left[|f^{(n+1)}(x)| = \left| \begin{cases} \pm\sin x \\ \pm\cos x \end{cases} \right| \leq 1 \right] \leq$$

$$\leq \sup_{x\in[a,b]} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{b^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \text{ т.к. } n! \text{ убыв быстрее } b^n$$

Итак, мы доказали, что $P_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ в $C[a,b]$.

• Допустим, что $P_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(x)$ в M, тогда оказалось бы, что $P_n \to P$ в $C[a,b]$. Тогда у нас получилось бы, что $P_1 \ldots P_n$ сходится и к $P(x)$, и к $f(x)$. Тогда по задаче 1 $f(x) = P(x)$, т.е. $\sin x$ явл. многочленом. Противоречие, $P_n(x) \not\to P(x)$

Опр Последов. $x_1, \ldots x_n, \ldots$ мн. нормир. пр-ва наз-ся фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 : \forall n, m \geq n_0$ будет выполнено нер-во $\| x_n - x_m \| < \varepsilon$

Из матана: если числовая посл. сходится, то она фунд. То же самое имеет место в любом нормир. пр-ве.

Пусть $x_n \to x_0$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \; \| x_n - x_0 \| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \; \forall m, n \geq n_0$ имеем $\| x_n \underset{\pm x_0}{-} x_m \| \leq \| x_n - x_0 \| + \| x_0 - x_m \| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, значит $x_1 \ldots x_n$ фунд.

Из мат. анализа вы знаете, что для чис. посл справедливо и обратное: т.е. всякая фунд. числовая посл. сходится.

В произвольном нормир. пр-ве это утв. может и не быть верным. В примере с мн-нами, сходящимися к $\sin x$ мы видели, что $P_n \to \sin x$ в $C[a,b]$, значит $P_1 \ldots P_n$ - фунд. в $C[a,b]$. Т.к. в пр-ве ~~мн~~-ов M норма такая же, как в $C[a,b]$, то $P_1 \ldots P_n$ - фунд. в M. Но $P_1 \ldots P_n \ldots$ не имеет предела в M

Опр Если в нормир. пр-ве всякая фунд. послед. сх-ся, т.е это пр-во наз-ся полным. Другое название полного нормированного пр-ва - Банахово пр-во.

Примеры Банаховых пр-в: $R, R^n, C[a,b], l_2$. Важнейшими примерами Банаховых пр-в явл. лебеговы пр-ва $L_p(D)$, где $p \geq 1$, $D \subset R^n$ - область. $L_p(D) \overset{\text{опр}}{=} \{ f : D \to R / \mathbb{C} \mid \int_D |f(x)|^p dx < \infty \}$

$\| f \|_{L_p(D)} = \{ \int_D |f(x)|^p dx \}^{1/p}$

Лекция 3 (12 февраля)

Свойства Лебеговских пр-в:

(1) Нер-во Гёльдера

Если $p > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (сопряжённые числа), $f \in L_p(\mathcal{D})$, $g \in L_q(\mathcal{D})$, тогда $f \cdot g \in L_1(\mathcal{D})$, причём $\| f \cdot g\|_{L_1(\mathcal{D})} \le \|f\|_{L_p(\mathcal{D})} \cdot \|g\|_{L_q(\mathcal{D})}$

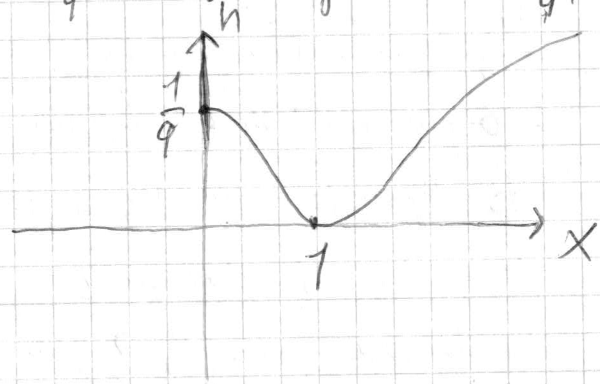
Идея док-ва:

I шаг: $\forall a, b > 0$ - вещ. числа $ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. Рассмотрим вспомогательную ф-цию $h(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{1}{q} - x$, тогда $h(0) = \frac{1}{q}$,

$\lim\limits_{x \to \infty} h(x) = +\infty$

$h'(x) = x^{p-1} - 1 \Leftrightarrow x = 1$

$h(1) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = 0 \to h(x) \ge 0$ $\forall x \ge 0$



Подставим $x \to a(b)^{-q/p}$

Тогда $0 \le h(x) = \frac{a^p \cdot b^{-q}}{p} + \frac{1}{q} - a \cdot b^{-q/p}$ $| \cdot pq$

$0 \le q \frac{a^p}{b^q} + p - a \cdot b^{-q/p} \cdot p \cdot q$ $| \cdot b^q$

$\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{q}$ - сопряжённые числа

$0 \le qa^p + p b^q - apq \cdot b$

$apqb \le qa^p + pb^q$ $| : pq$

$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

II шаг: Положим $A = \left\{\int_{\mathcal{D}} |f(x)|^p dx\right\}^{1/p}$, $B = \left\{\int_{\mathcal{D}} |g(x)|^q dx\right\}^{1/q}$,

$a = \frac{|f(x)|}{A}$, $b = \frac{|g(x)|}{B}$. Из нер-ва

$$\frac{|f(x) \cdot g(x)|}{AB} \le \int_{\mathcal{D}} \frac{|f(x)|^{p \to A^p}}{\underbrace{pA^p}_{\text{const}}} dx + \int_{\mathcal{D}} \frac{|g(x)|^{q \to B^q}}{\underbrace{qB^q}_{\text{const}}} dx = $$

$\overset{①}{=} \frac{A^p}{pA^p} + \frac{B^q}{qB^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \to \int\limits_{D} |f(x) g(x)| \, dx \leq$

$\leq AB \leftrightarrow \|fg\|_{L_1(D)} \leq \|f\|_{L_p(D)} \cdot \|g\|_{L_q(D)}$.

Если $A = 0$, то $f \equiv 0$ всюду, кроме, может быть, множества меры $0 \to fg = 0$ всюду, кроме, м. б., мн-ва меры $0 \to$

$\to \int\limits_{D} fg \, dx = 0$, а тогда нер-во Гёльдера превратится в равенство $0 = 0 \cdot \|g\|_{L_q(D)}$. Аналогично $B = 0$. ■

Замечание. Нер-во Гёльдера точное, т. е. если $f \notin L_p(D)$, то $\exists g \in L_q(D) : fg \notin L_1(D)$, т. е. $\int\limits_{D} |f \cdot g| \, dx = +\infty$.

(2) Нер-во Минковского

Если $p \geq 1$ и $f, g \in L_p(D)$, то $f + g \in L_p(D)$, причём имеет место нер-во $\|f+g\|_{L_p(D)} \leq \|f\|_{L_p(D)} + \|g\|_{L_p(D)}$

Замечание. Нер-во Минковского выводится из Гёльдера; при $p = 1$ очевидно.

(3) $\forall p \geq 1$ $L_p(D)$ является полным сепарабельным линейным нормированным пр-вом с нормой $\|f\|_{L_p(D)} = \left\{\int\limits_{D} |f(x)|^p \, dx\right\}^{1/p}$

Замечание. В пр-ве $L_p(D)$ две ф-ии считаются равными, если они совпадают всюду, кроме, быть может, мн-ва меры 0.

(5.3) Линейные пр-ва со скалярным пр-ем

Опр. Пусть L явл. линейным пр-вом. Говорят, что в L задано скалярное произведение, если задана ф-ия $L \times L \to \mathbb{R} / \mathbb{C}$

которая паре векторов $x, y \in L$ сопоставляют число (x, y), причём выполняются след. условия:

(1) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$ – лин. по первому арг.

(2) $\forall x, y \in L$ имеет место рав-во $(x, y) = \overline{(y, x)}$, где черта – компл. сопр. – эрмитова симметричность

(3) положительная определённость $\forall x \in L$ $(x, x) \geq 0$, причём $(x, x) = 0 \leftrightarrow x = 0$

Примеры пр-в со скал. произведением:

1) $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ со скалярным произв., заданным ф-лой $(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$

2) в l_2 ф-ла $(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$ задаёт скалярное пр-ие.

Почему числовой ряд сходится? $|x_k \overline{y_k}| \leq |x_k| \cdot |y_k| \leq \frac{|x_k|^2 + |y_k|^2}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |x_k \overline{y_k}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|y_k|^2}{2} < \infty$, т.к. $x, y \in l_2 \rightarrow$

$\rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$ сходится абсолютно, а значит сходится

3) в $L_2(D)$ ф-ла $(f, g) = \int_D f(x) \cdot \overline{g(x)} dx$ задаёт скал. пр-ие.

почему $|f(x) g(x)| < \infty$? $\int_D |f \cdot \overline{g}| dx \leq \int_D \frac{|f|^2 + |g|^2}{2} dx < \infty$

В след. лемма L – пр-во линейное со скаляр. пр-ием

<u>Лемма 1</u>: $\forall x, y \in L$ и $\forall \alpha$ – число справедливы рав-ва:

(1) $(x+y, x+y) = (x, x) + 2\operatorname{Re}(x, y) + (y, y)$

(2) $(\alpha x, \alpha x) = |\alpha|^2 (x, x)$

Док-во: $(x+y, x+y) = (x, x+y) + (y, x+y) =$

$= \overline{(x+y, x)} + \overline{(x+y, y)} = \overline{(x, x)} + \overline{(y, x)} + \overline{(x, y)} + \overline{(y, y)} =$

$= (x, x) + 2\operatorname{Re}(x, y) + (y, y)$

$(\alpha x, \alpha x) = \alpha(x, \alpha x) = \alpha \overline{(\alpha x, x)} = \alpha \overline{\alpha} (x, x) = |\alpha|^2 (x, x)$

Лемма 2 Коши - Буняковского

$\forall x, y \in L$ справедливо нер-во $|(x,y)|^2 \le (x,x)\cdot(y,y)$

Док-во: I случай: $(x,y) \in R$. $\forall t \in R$ рассмотрим

$0 \le (x+ty, x+ty) = (x,x) + 2Re(x,ty) + t^2(y,y) =$

$= t^2(y,y) + t\cdot 2(x,y) + (x,x)$. Это квадратичный трёхчлен и он неотрицателен. Этот трёхчлен или не имеет вещ. корней, или 1 вещ. корень $\leftrightarrow$ $D \le 0$ $= b^2 - 4ac \le 0$

$2^2(x,y)^2 \le 4(x,x)(y,y) \to (x,y)^2 \le (x,x)(y,y)$

II случай: $(x,y) \in \mathbb{C}$. Тогда $(x,y) = r\cdot e^{i\varphi}$, $r \ge 0$ и $\varphi \in R$

Лекция 4 (19 февр.)

Построим вспомогательный вектор $\tilde{x} = e^{-i\varphi}x$, тогда

$(\tilde{x}, y) = (e^{-i\varphi}x, y) = e^{-i\varphi}(x,y) = e^{-i\varphi}\cdot r\cdot e^{i\varphi} = r = |(x,y)| \in R$.

По случаю I: $\underset{|(x,y)|^2}{\underset{\parallel}{|(\tilde{x},y)|^2}} \le (\tilde{x},\tilde{x})(y,y) = (x,x)(y,y)$ ЧТД

Лемма 3 В линейн. пр-ве L со скал. пр-ием ф-ла

$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ задаёт норму.

Док-во: Убедимся, что для этой ф-ии выполнены три аксиомы норм

1) неотриц. $\overset{\sqrt{(x,x)}}{\overset{\shortparallel}{\|x\|}} \ge 0$ $\forall x \in L$ и $\|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0$

2) положит. однородность $\|\alpha x\| = |\alpha|\cdot\|x\|$ $\forall x \in L$ $\forall \alpha$

$\sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{|\alpha|^2(x,x)} = |\alpha|\sqrt{(x,x)}$

3) нер-во треугольника

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2\,\mathrm{Re}\overset{\overset{z}{\parallel}\swarrow \text{обозначим}}{(x,y)} + (y,y) \le$$

$$\le \|x\|^2 + 2\underbrace{|\mathrm{Re}(x,y)|}_{\le |z| = |(x,y)| \underset{\text{КБШ}}{\le} \sqrt{(x,x)(y,y)} = \|x\|\cdot\|y\|} + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|. \blacksquare$$

<u>Замечание 1</u>. Говорят, что норма $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ порождена скалярным произведением.

<u>Замечание 2</u>. Правильная формулировка нер-ва Коши-Буняк.:

$|(x,y)| \le \|x\|\cdot\|y\|$.

<u>Замечание 3</u>. Любое пр-во со скалярным пр-ием является нормированным. В частности, в нём определены понятия: предел послед., фундам. посл., замкнутое мн-во и т. д.

<u>Лемма 4</u>. Скалярное пр-ие непрерывно по первому аргументу, т. е. если $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, то $\forall y \in L$ справедливо

$(x_n, y) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x,y)$ - числовая послед.

Док-во: $|(x_n,y) - (x,y)| = |(x_n - x, y)| \overset{\text{КБШ}}{\le} \|x_n - x\|\,\|y\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, если $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. $\blacksquare$

<u>Задача</u> Доказать, что скалр. пр-ие непрерывно по 2-му аргументу и непрерывно по совокупности двух переменных

<u>Лемма 5</u> Рав-во параллелограмма.

Пусть L - лин. пр-во со скалярным пр-ием. Тогда $\forall x, y \in L$ выполняется рав-во $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$, где $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ - норма, порождённая скалярным пр-ием.

Док-во: $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=\|x\|^2+2\operatorname{Re}(x,y)+\|y\|^2+$
$+\|x\|^2+2\operatorname{Re}(x,-y)+\|-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$ ■

Замечание. Можно доказать и обратное, т.е. если в нормир. пр-ве $\forall x, y$ выполняется рав-во пар-ма, то норма в этом пр-ве порождается некоторым скалярным пр-ем.

Опр. Лин. пр-во со скалярным пр-ем наз-ся гильбертовым, если оно является полным относительно нормы, порождённой этим скалярным пр-ем

Примеры гильбертовых пр-в: $R^n, C^n, l_2, L_2(D)$

5.4 Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Всюду в этом пункте L - лин. пр-во со скалярным пр-ем, $(x, y)\in L$

Опр. Говорят, что x, y ортогональны друг другу, если $(x,y)=0$.
$x\perp y$

Опр. Пусть $x\neq 0$ и $y\neq 0$ Углом между x, y наз-ся число $\varphi\in[0,\pi]$ такое, что $\cos\varphi=\frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}$

Замеч. Угол опред., т.к. $\left|\frac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|}\right|=\frac{|(x,y)|}{\|x\|\|y\|}\overset{\text{КБШ}}{\leq}1$

Угол опред. ед. образом.

$\varphi=\arccos\frac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|}\in[0,\pi]$

Угол определён только в вещ. лин. пр-вах над R

В вещ. пр-ве $(x,y)=0\leftrightarrow x\perp y$

Теорема (процесс ортогон. Грама-Шмидта)

Пусть L - лин. пр-во со скалярным пр-ием и $x_1 \dots x_n, \dots$ - последовательность лин. нез. векторов в L. Тогда след. послед.

$$y_1 = x_1 \qquad z_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$$

$$y_2 = x_2 - (x_2, z_1) z_1 \qquad z_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}$$

$$y_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1} (x_n, z_k) z_k \qquad z_k = \frac{y_k}{\|y_k\|}$$

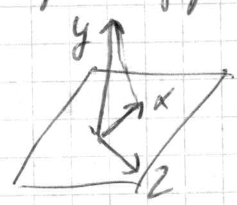
Св-ва:

1) $z_1, \dots z_n, \dots$ - ортонормир. посл-ть, т.е. $(z_n, z_m) = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}$

2) $\forall n \quad L[x_1, \dots, x_n] = L[z_1 \dots z_n] = \{ \alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_n z_n \mid \alpha_1 \dots \alpha_n$ - числа$\}$ - лин. оболочка векторов.

5.5 Приближение векторами конечномерного подпр-ва и ортогональное проецирование

Опр. Пусть L - лин. пр-во со скаляр. пр-ием и S - его подпр-во. Говорят, что $x \in S$ является вектором наилучшего приближения к вектору $y \in L$ с помощью векторов подпр-ва S, если $\forall z \in S \quad \|y - x\| \leq \|y - z\|$. Другими словами: 1) x называют ближайшим к y вектором подпр-ва S. 2) $\|y - x\| = \inf\limits_{z \in S} \|y - z\|$



Лемма Пусть H - гильбертово пр-во, S - замкнутое подпр-во H. Тогда $\forall y \in H \quad \exists! \; x \in S$ - вектор наилучшего приближения

Док-во: Пусть $d = \inf\limits_{z \in S} \|y - z\|$. Выберем в S послед. точек такую, что $\|y - x_n\| \xrightarrow[n \to \infty]{} d$. Применим рав-во параллелограмма к векторам $y - x_n$ и $y - x_m$:

$$\|(y - x_m) + (y - x_n)\|^2 + \|(y - x_n) - (y - x_m)\|^2 = 2\|y - x_n\|^2 + 2\|y - x_m\|^2$$

$$\|x_n - x_m\|^2 = 2\|y - x_n\|^2 + 2\|y - x_m\|^2 - \|2y - (x_m + x_n)\|^2$$

$$\|2y - (x_m + x_n)\|^2 = 2^2 \left\| y - \frac{x_n + x_m}{2} \right\|^2$$

$$(*)\ \|x_n - x_m\|^2 = 2\|y - x_n\|^2 + 2\|y - x_m\|^2 - 4\left\|y - \frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2$$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon): \forall n, m \geq n(\varepsilon)$: $d^2 - \varepsilon \leq \|y - x_n\|^2 \leq d^2 + \varepsilon$

$$d^2 - \varepsilon \leq \|y - x_m\|^2 \leq d^2 + \varepsilon$$

Из $(*) \to \|x_n - x_m\|^2 \leq 2(d^2 + \varepsilon) + 2(d^2 + \varepsilon) - 4d^2 = 4\varepsilon$, т.к.

$\left\|y - \frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2 \geq \left[\inf\limits_{z \in S} \|y - z\|\right]^2 = d^2 \to$

$\to x_1, \dots x_n, \dots$ – фундаментальная, т.к. H – гильбертово, то оно полное, т.е. всякая фунд. посл.-ть сходится. Значит $\exists x_0 \in H$: $x \to x_0$. Но все $x_n \in S$, $x_n \to x_0$ и S – замкнутое $\to x_0 \in S$.

Перейдём к пределу в рав-ве $\|y - x_n\| \underset{n \to \infty}{\to} d$

$$\|y - x_0\| = d \to x_0 \text{ – ближайшая точка.}$$

Докажем единственность ближайшей точки. От противного: пусть x_0 и $\tilde{x}_0$ – таковы, что $d = \inf\limits_{z \in S} \|y - z\| = \|y - x_0\| = \|y - \tilde{x}_0\|$.

Подставим в $(*)$ x_0 и $\tilde{x}_0$ вместо x_n и x_m:

$$\|x_0 - \tilde{x}_0\|^2 = 2\|y - x_0\|^2 + 2\|y - \tilde{x}_0\|^2 - 4\Big\|y - \underbrace{\frac{x_0 + \tilde{x}_0}{2}}_{\in S}\Big\|^2_{\geq d^2} \leq$$

$$\leq 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0 \to \|x_0 - \tilde{x}_0\| = 0 \to x_0 - \tilde{x}_0 = 0 \ \blacksquare$$

Лекция 5 (26 февр.)

Опр Пусть L – лин. пр-во со скалярным пр-ием, и S – его лин. подпр-во. Говорят, что $x \in S$ явл. ортог. проекцией вектора $y \in L$ на подпр-во S, если $(y - x) \perp z\ \forall z \in S$

Лемма Пусть L - лин. пр-во со скаляр. пр-ием и S - его подпр-во. Тогда след. утв. эквивалентны:

(1) $x \in S$ явл ортогон. пр-ией $y \in L$ на S

(2) $x \in S$ явл вектором наилучшего приближения к вектору $y \in L$ с помощью векторов подпр-ва S.

Док-во: (основано на $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\mathrm{Re}(u,v) + \|v\|^2$)

(1) $\to$ (2)

$$\forall z \in S \quad \|y \underset{\pm x}{-} z\|^2 = \|\underbrace{(y-x)}_{u} + \underbrace{(z-x)}_{v}\|^2 =$$

$$= \|y-x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\underset{\in L}{y-x}, \underset{\in S}{z-x}) + \|z-x\|^2 \geqslant \|y-x\|^2 \to (2)$$

$\mathrm{Re}(y-x, z-x) = 0$ (т.к. $(y-x) \perp S$)

(2) $\to$ (1)

Рассмотрим вспом. ф-ию $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определяемую ф-лой $f(t) = \|y - x + t \cdot z\|^2$, где z - некоторый фикс. вектор из S. Тогда f достигает минимума в т. $t=0$, т.к. $\forall t \in \mathbb{R}$ $f(t) = \|y - \underbrace{x + tz}_{\in S}\|^2 \geqslant \|y-x\|^2 = f(0)$

$$f'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \lim_{t \to 0} \frac{\|\overset{u}{y-x} + \overset{v}{tz}\|^2 - \|y-x\|^2}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\|y-x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(y-x, tz) + \|tz\|^2 - \|y-x\|^2}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} [2\,\mathrm{Re}(y-x, z) + t\|z\|^2] = 2\,\mathrm{Re}(y-x,z) \overset{\text{минимум}}{=} 0 \quad \forall z \in S$$

I случай: $(y-x, z) = 0$ $\forall z \in S \to (y-x) \perp S$

II случай: $(y-x, z) \in \mathbb{C} \to L$ - лин. пр-во над полем комплексных чисел $\to$ применю те же рассуждения к вектору $iz \to$

$\to \mathrm{Re}(y-x, iz) = 0$

$\mathrm{Re}(y-x, iz) = \mathrm{Re}(-i\underbrace{(y-x, z)}_{a+ib}) = \mathrm{Re}(-ia+b) = b = \mathrm{Im}(y-x, z) = 0$

$\forall z \in S \to (y-x, z) = 0 \ \forall z \in S \to (y-x) \perp z \ \forall z \in S$ ▪

<u>Опр.</u> Пусть L - лин. пр-во со скалярным пр-ием, S, T - его подпр-ва. Говорят, что $S^\perp = \{x \in L \mid x \perp y \ \forall y \in S\}$ наз-ся ортогональным дополнением к подпр-ву S. Говорят, что L является прямой суммой подпр-в S и T, если $\forall x \in L$ $\exists! \, y \in S \ \exists! \, z \in T: \ x = y + z$. $L = S \oplus T$

<u>Примеры:</u> $L = \mathbb{R}^3$, S - плоскость. Тогда $S^\perp$ - прямая, перпенд. этой плоскости.

$L = \mathbb{R}^3$, S - плоскость, T - ещё одна плоскость.

Тогда $L = S \oplus S^\perp$, но $L \neq S \oplus T$

т.к. разложение $\underset{\in L}{x} = \underset{\in S}{y} + \underset{\in T}{z}$ не единственно

<u>Теорема</u>

Пусть H - гильбертово пр-во, S - замкнутое подпр-во в H. Тогда $H = S \oplus S^\perp$

Док-во:

вектор наил. прибл. $\leftrightarrow$ ортог. проекция

Существование: $\underset{\in H}{x} = \underset{\in S}{y} + \underbrace{(x-y)}_{\in S^\perp}$

Единственность: От противного: т.е. $\exists x \in H$ для кот. $\exists y, \tilde{y} \in S$ и $\exists z, \tilde{z} \in S^\perp$ такие, что $y + z = x = \tilde{y} + \tilde{z} \to$

$\to \underbrace{y - \tilde{y}}_{S} = \underset{\in S^\perp}{\tilde{z} - z} \to \|y - \tilde{y}\|^2 = (y-\tilde{y}, y-\tilde{y}) = (\underbrace{y-\tilde{y}}_{S}, \underset{\in S^\perp}{z - \tilde{z}}) = 0 \to$

$\to y-\tilde{y}=0 \to y=\tilde{y}$.

Аналогично, $z=\tilde{z}$. Значит есть единственность ЧТД.

5.6 Проектирование на конечномерное подпр-во и нер-во Бесселя.

Теорема

Пусть L - лин. пр-во со скалярным пр-ем, S - конечномерное подпр-во в L, и пусть $x_1 \dots x_n$ - ортонормир. базис в S. Тогда $\forall y \in L$ вектор, заданный ф-лой $x=\sum_{k=1}^{n} x_k \mathfrak{d}_k$, где $\mathfrak{d}_k=(y, x_k)$, явл. ортог. проекцией вектора y на S. При этом $\|y\|^2=\|x\|^2+\|y-x\|^2$ (*)

Замечание: ф-лу (*) называют теоремой Пифагора.

Док-во: I шаг: $\forall p=1 \dots n \quad y-x \perp x_p$

В самом деле: $(y-x, x_p)=(y, x_p)-(\sum_{k=1}^{n} \mathfrak{d}_k x_k, x_p)=\mathfrak{d}_p-$

$-\mathfrak{d}_p=0$

II шаг: $\forall z \in S \quad y-x \perp z$. В самом деле:

$(y-x, z)=(y-x, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k)=\overline{(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, y-x)}=$

$=\overline{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (x_k, y-x)}=\sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k} \underbrace{(y-x, x_k)}_{0,\text{ по шагу I}}=0 \to x$ - ортог. проекция

III шаг: $\|y\|^2=\|\underset{u}{x}+(\underset{v}{y-x})\|^2=\|x\|^2+2\operatorname{Re}(x, \overset{0 \text{ по II шагу}}{y-x})+$

$+\|y-x\|^2=\|x\|^2+\|y-x\|^2$ ∎

Опр. Пусть L - лин. пр-во со скаляр. пр-ем, и пусть $x_1, \dots x_n, \dots$ являются ортонорм. последовательностью в L. Тогда ~~[illegible]~~ говорят, что (1) $\mathfrak{d}_k=(x, x_k)$ наз-ся коэф. Фурье вектора $x \in L$ относительно ортонорм. системы $x_1 \ldots x_n \ldots$

(2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$, где λ_k - коэф. Фурье вектора x, наз-ся рядом Фурье вектора $x \in L$ относит. ортонормир. системы $x_1 \ldots x_n \ldots$,

Пояснение: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k = \lim\limits_{N \to \infty} S_N$, т.е. $\| \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k - S_N \| \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$

Теорема (нер-во Бесселя)

Пусть L - лин. пр-во со скалярным пр-нием, $x \in L$, $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ - ортонормир. пос-ть векторов в L, и $\forall k$ $\lambda_k = (x, x_k)$ - коэф. Фурье. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$ сходится и справедливо нер-во $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \leq \|x\|^2$

Док-во: Обозначим $S_N = \sum\limits_{k=1}^{N} \lambda_k x_k$. Знаем из (5.5), что S_N яв. вектором наил. прибл. к вектору x с помощью векторов из подпр-ва $L[x_1 \ldots x_N] = \{ y \in L \mid y = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_N x_N \}$ кот. наз-ся линейной оболочкой векторов $x_1 \ldots x_N$. По теореме Пифагора $\|x\|^2 = \| \sum\limits_{k=1}^{N} \lambda_k x_k \|^2 + \underbrace{\| x - \sum\limits_{k=1}^{N} \lambda_k x_k \|^2}_{\geq 0} \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{N} |\lambda_k|^2 \rightarrow$

$\rightarrow \sum\limits_{k=1}^{N} |\lambda_k|^2$ ограничен, а значит сходится.

Переходя к пределу при $N \to \infty$ получим нер-во Бесселя

Лекция 6 (4 марта)

5.7 Полные и замкнутые ортонормированные системы

Рав-во Парсеваля. Гильбертов базис. Критерий полноты ортонормированной системы.

<u>Опр</u> Пусть H - гильб. пр-во и $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ - ортонорм. система в H, т.е. $(x_n, x_m) = \delta_{nm}$.

Тогда:

(1) система $x_1, .., x_n, ...$ наз-ся полной, если её нельзя пополнить, т.е. если не сущ. ортонорм. системы $x, x_1, .., x_n, ...$ (которые наз-ся пополнением); другими словами, если из того, что $x \perp x_n \ \forall n \to x = 0$

(2) система $x_1, ..., x_n, ...$ наз-ся гильбертовым базисом, если $\forall x \in H$ справедливо $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$, где $\lambda_k = (x, x_k)$ - эти коэф. наз-ся коэф. Фурье вектора x относительно ортонорм. сист. $x_1 .., x_n, ...$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$ наз-ся рядом Фурье вектора x.

(3) система $x_1, ..., x_n, ...$ наз-ся замкнутой, если $\forall x \in H$ выполняется рав-во $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$, где $\lambda_k = (x, x_k)$

<u>Теорема</u> (критерий полноты ортонорм. сист.).

Пусть H - гильбертово пр-во и $x_1, ..., x_n, ...$ - ортонорм. система в H. Тогда след. утв. эквивалентны:

(1) $x_1, .., x_n, ..$ - полная

(2) $x_1, ..., x_n, ..$ - гильберт. базис

(3) $x_1, ..., x_n, ..$ - замкнутая

Док-во:

<u>$1 \to 2$</u>: Докажем, что $x_1, .., x_n, ...$ - полная. Из нер-ва Бесселя $\to$ числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$ сх-ся и его сумма $\leq \|x\|^2$. Из критерия Коши сх-ти числовых рядов $\to \forall \varepsilon > 0$ $\exists n(\varepsilon) : \forall n \geq n(\varepsilon) \ \forall p \geq 1 \ \sum_{k=n+1}^{n+p} |\lambda_k|^2 < \varepsilon$. Обозначим $S_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$. Тогда $\|S_{n+p} - S_n\|^2 = \|\sum_{k=n+1}^{n+p} \lambda_k x_k\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |\lambda_k|^2 < \varepsilon \to S_n$ - фундаментальная. По условию H - гильбертово, т.е. полное (любая фунд. посл-ть сходится) $\to$

$\to S_1 \dots S_n$ – сходящая, т.е. $\exists z \in H: z = \lim_{n\to\infty} S_n =$

$= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$. Почему $z = x$? Убедимся, что $\forall k \;\; x - z \perp x_k$.

В самом деле, $(x-z, x_k) = (x, x_k) - (z, x_k) =$
$= \lambda_k - (\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k, x_k) = \lambda_k - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x_k, x_k) = \lambda_k - \lambda_k = 0.$

Т.к. $x_1, \dots, x_n$ – полная, то $x - z = 0 \to x = z = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$, т.е. $x_1 \dots x_n$ – гильбертов базис (то есть x раскладывается в ряд Фурье). ■

$2 \to 3$: Предположим, что $x_1, \dots, x_n, \dots$ – гильбертов базис. Тогда $\forall x, y \in H$ обозн. $\lambda_k = (x, x_k)$ – коэф. Фурье вектора x, $\mu_k = (y, x_k)$ – коэф. Фурье вектора y, при этом
$x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$, $y = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k x_k$. Тогда $(x, y) = (\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k, y) =$
$= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \underbrace{(x_k, y)}_{\overline{\mu_k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cdot \overline{\mu_k}$ – это рав-во наз-ся рав-вом Парсеваля. Подставим в него $y = x$: $\|x\|^2 = (x, x) = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$, т.е. $x_1, \dots, x_n, \dots$ – замкнутая. ■

$3 \to 1$: Допустим, что $x_1, \dots, x_n$ – замкнутая, и пусть $x \perp x_k \; \forall k$. Тогда $\lambda_k = (x, x_k) = 0 \; \forall k$, т.к. $x_1, \dots, x_n, \dots$ – замкнутая, то $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 = 0 \to x = 0 \to$ система $x_1, \dots, x_n, \dots$ – полная.

Теорема (о сущ. гильбертова базиса) без Док-ва!

Во всяком сепарабельном гильб. пр-ве ненулевой размерности сущ. гильбертов базис.

Идея док-ва: пусть $y_1, \dots, y_n, \dots$ – счётная плотная послед.-ть векторов в H. $\forall n$ вычеркнем из этой посл.-ти вектор y_n, если он содержится в лин. оболочке предыдущих векторов $y_1, \dots, y_{n-1}$

Останется посл-ть лин.нез. векторов. К этой новой посл-ти применим процесс ортогон. Грамма - Шмидта, получится гильб. базис.

5.8 Теорема Рисса - Фишера. Изоморфизм гильб. пр-в.

<u>Теорема</u> (Рисса - Фишера)

Пусть H - гильб. пр-во, $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ - ортонормир. посл-ть в H, и пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ - посл-ть комплексных чисел такая, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 < +\infty$. Тогда $\exists!\ x \in H: \lambda_k = (x, x_k)$ - коэф. Фурье и $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$.

Док-во: Обозначим $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$. Из док-ва (1→2) в п.5.7 $\to S_1, \ldots, S_n, \ldots$ - фундам. Положим $x = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Убед., что x - искомый: $(x, x_k) \underset{\text{непр. скал. пр-ия}}{=} (\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{m=1}^{n} \lambda_m x_m, x_k) =$

$= \sum\limits_{m=1}^{\infty} \lambda_m (x_m, x_k) = \lambda_k$. По теореме об элементе наилучшего приближения с помощью векторов из конечномерного пр-ва $\to$
$\to S_n$ - вектор наил. прибл. к x с помощью векторов из $L[x_1, \ldots, x_n]$. В том числе, для S_n справедлива т-ма Пифагора: $\|x\|^2 = \|S_n\|^2 + \|S_n - x\|^2$

$$\|S_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{вектор прибл.}$$

$$\|S_n\|^2 = \Big\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\Big\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$$

Докажем единственность. От противного! Допустим, что $\exists x, \tilde{x} \in H: \forall k\ (x, x_k) = (\tilde{x}, x_k) = \lambda_k$ и $\|x\|^2 = \|\tilde{x}\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$. Тогда $\|x - \tilde{x}\|^2 = \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}(x, \tilde{x}) + \|\tilde{x}\|^2$.

Т.к. $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$, то $(x, \tilde{x}) = (\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k, \tilde{x}) =$

$= \ldots = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$. Значит $\|x - \tilde{x}\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 - 2|\lambda_k|^2 + |\lambda_k|^2 = 0 \to$

$\to x = \tilde{x}$ ■

Опр. Пусть L и K – два гильб. пр-ва. Они наз-ся изоморфными, если сущ. взаимнообратные линейные отобр. $A: L \to K$ и $B: K \to L$, которые сохраняют скал. пр-ие, т.е. $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$ и $(A(x), A(y))_K = (x, y)_L$ $\forall x, y \in L$ и $B(A(x)) = x$ $\forall x \in L$ и

$A(B(y)) = y$ $\forall y \in K$.

Замечание: Интуитивно: L и K изоморфны, если K получено из L переобозначением: вместо $x \in L$ пишут $A(x) \in K$.

Теорема Любое бесконечномерное гильбертово пр-во (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) изоморфно пр-ву l_2.

Идея док-ва: Пусть $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ – гильберт. базис в H. Зададим $A: H \to l_2$ по формуле $A(x) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots)$, где $\lambda_n = (x, x_n)$ – коэф. Фурье. Набор $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots)$ лежит в l_2 в силу нер-ва Бесселя: $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \le \|x\|^2 < +\infty$.

Отобр. A линейно (в силу линейности скал. пр-ия) и сохр. скал. произв.: $(x, y)_H \underset{\substack{\uparrow \\ \text{рав-во} \\ \text{Парсеваля}}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overline{\mu_k} = ((\lambda_1, \ldots \lambda_n, \ldots), (\mu_1, \ldots, \mu_n))_{l_2}$

Зададим отобр. $B: l_2 \to H$ по т-ме Рисса-Фишера: набору чисел $\lambda_1 \ldots \lambda_n, \ldots$ таких, что $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 < \infty$ сопоставим тот единств. $x \in H$, для кот. это коэф. Фурье, т.е. $\lambda_n = (x, x_n)$, $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$. Почти очевидно, что B линейно, сохр. скал. пр-ие и является взаимно обратным к A ■

5.9 Тригонометр. сист. ф-ий как пример полной ортогональной системы в $L_2[-\pi, \pi]$. Напомним, что в $L_2[-\pi, \pi] = \{ f: [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \mid \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx < +\infty \}$ скал. пр-ие задается ф-лой $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$.

Лекция 7 (11 марта)

• На языке рядов Фурье

1) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx = \pi\delta_{mn}$
$\{\sin nx, \sin mx\}$

2) Коэф. Фурье ф-ии f задаются формулами $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$

3) Ряд Фурье
$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx$

4) Рав-во Ляпунова
$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$

• На языке гильбертовых пр-в

Последов. ф-ий $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \dots$ – явл. ортонормированной

Коэф. Фурье ф-ии задаются
$\alpha_0 = (f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$
$\alpha_n = (f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$.
$\beta_n = \dots$
$\frac{a_0}{2} = \frac{\alpha_0}{\sqrt{2\pi}}$, $a_n = \frac{\alpha_n}{\sqrt{\pi}}$, $b_n = \frac{\beta_n}{\sqrt{\pi}}$

Ряд Фурье
$f(x) = \alpha_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} + \beta_n\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$

Рав-во Парсеваля
$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$, λ_n – коэф. Фурье

$$\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx}_{\|} = \underbrace{\alpha_0^2}_{\frac{\sqrt{2\pi}}{2}a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} (\underbrace{\alpha_n}_{\sqrt{\pi}a_n}{}^2 + \underbrace{\beta_n}_{\sqrt{\pi}b_n}{}^2)$$

Значит тригонометр. система замкнута, а значит она полная и явл. гильб. базисом

Вопрос: бывают ли другие ортонорм. базисы в $L_2[-\pi, \pi]$.

Можно ли выбрать базис из многочленов?

§6. Ортогональные многочлены

6.1 Ортогональные многочлены как результат ортогонализации последов. мономов.

<u>Опр.</u> Ф-ия $h:(a,b)\to R$ наз-ся весовой ф-ией или весом, если: 1) $h(x)\geqslant 0$ $\forall x\in(a,b)$

2) $h(x)>0$ $\forall x\in(a,b)$, кроме, м. б., конечного числа точек.

3) $0<\int\limits_a^b h(x)dx<\infty$

<u>Опр.</u> Пусть h - весовая ф-ия. Весовым лебеговским пр-вом называют $\{f:(a,b)\to R \mid \int\limits_a^b f^2(x)h(x)dx<+\infty\}$.

Обозн. $L_2^h(a,b)$. Формула $(f,g)\overset{*}{=}\int\limits_a^b f(x)g(x)h(x)dx$ задает скал. пр-ие в $L_2^h(a,b)$.

Лемма (без док-ва)

Для каждой весовой ф-ии h пр-во $L_2^h(a,b)$ явл. гильбертовым, т.е. линейным, в котором $*$ задаёт скал. пр-ие и которое явл. полным относительно нормы, порождённой этим скалярным пр-ием

Замеч.: Если (a,b) имеет конечную длину, то любой мн-н $\in L_2^h(a,b)$

<u>Опр.</u> Посл-ть многочленов $q_0(x), q_1(x),\dots, q_n(x),\dots$ наз-ся посл-тью ортогональных мн-нов с весом h на промежутке (a,b), если:

1) эта посл-ть ортонормирована в $L_2^h(a,b)$, т.е. $\int\limits_a^b q_n(x)q_m(x)h(x)dx = \delta_{nm}$

2) $\forall n$ $q_n(x)$ явл. мн-ном степени n

3) $\forall n$ старший коэф. мн-на $q_n(x)$ положителен.