Можно ли выбрать базис из многочленов?

§6. Ортогональные многочлены

6.1 Ортогональные многочлены как результат ортогонализации последов. мономов.

<u>Опр.</u> Ф-ия $h: (a, b) \to R$ наз-ся весовой ф-ией или весом, если: 1) $h(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

2) $h(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$, кроме, м. б., конечного числа точек.

3) $0 < \int_a^b h(x) dx < \infty$

<u>Опр.</u> Пусть h - весовая ф-ия. Весовым лебеговским пр-вом называют $\{ f: (a, b) \to R \mid \int_a^b f^2(x) h(x) dx < +\infty \}$.
Обозн. $L_2^h (a, b)$. Формула $(f, g) \overset{*}{=} \int_a^b f(x) g(x) h(x) dx$ задает скал. пр-ие в $L_2^h (a, b)$.

Лемма (без док-ва)

Для каждой весовой ф-ии h пр-во $L_2^h (a, b)$ явл. гильбертовым, т.е. линейным, в котором $*$ задаёт скал. пр-ие и которое явл. полным относительно нормы, порождённой этим скалярным пр-ием

Замеч.: Если (a, b) имеет конечную длину, то любой многочлен $\in L_2^h (a, b)$

<u>Опр.</u> Посл-ть многочленов $q_0(x), q_1(x), \ldots, q_n(x), \ldots$ наз-ся посл-тью ортогональных мн-нов с весом h на промежутке (a, b), если:

1) эта посл-ть ортонормирована в $L_2^h (a, b)$, т.е. $\int_a^b q_n(x) q_m(x) h(x) dx = \delta_{nm}$

2) $\forall n$ $q_n(x)$ явл. мн-ном степени n

3) $\forall n$ старший коэф. мн-на $q_n(x)$ положителен.

6.2 Общие св-ва ортогональных мн-нов.

Здесь $h: [a,b] \to \mathbb{R}$ - вес, $q_0, q_1, \dots, q_n, \dots$ - последов. ортогон. мн-нов с весом h на $[a,b]$.

Общие св-ва ортогон. мн-нов

(1) $\forall h$ сущ. последов. ортогон. мн-нов

Док-во: возьмём последов. мономов и ортогонализуем по Граму-Шмидту.

(2) Последов. ортогон. мн-нов определена весом однозначно

Док-во: • $L[q_0, q_1, \dots, q_n] = L[1, x, x^2, \dots, x^n]$, т.к.

$\subset$ - очевидно и $\supset$ - по индукции. База индукции: $L[q_0] \supset L[1]$ - очевидно. Шаг индукции: Допустим для некоторого n

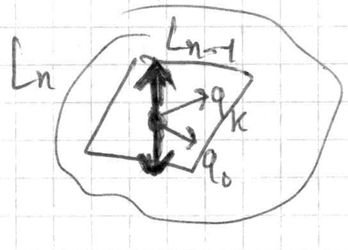
$L[q_0, \dots, q_n] \supset L[1, x, \dots, x^n]$ и докажем это же включение для $n+1$: $P(x) = \alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot x + \dots + \alpha_n x^n + \alpha_{n+1} x^{n+1}$; $q_{n+1} =$

$= \beta_{n+1} x^{n+1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \beta_k x^k}_{\in L[q_0, \dots, q_n]} \longrightarrow P(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k + \alpha_{n+1} \cdot$

$\cdot \left(\frac{1}{\beta_{n+1}} q_{n+1} - \frac{1}{\beta_{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \beta_k x^k \right) \in L[q_0, q_1, \dots, q^{n+1}]$

• $\dim L_n = n+1$

Допустим, что мн-ны $q_0, q_1, \dots, q_{n-1}$ уже определены весом h однозначно. Ортогональное дополнение к L_{n-1} в L_n имеет размерность 1. Значит, в L_n есть ровно два единичных вектора, перпендикулярных L_{n-1},



причём только один из них имеет положит. коэфф. ∎

(3) Любой мн-н Q_n степени n может быть представлен в виде лин. комб. мн-нов $q_0, q_1, \dots, q_n$

Док-во: $Q_n \in L[1, x, \dots, x^n] = L[q_0, q_1, \dots q_n]$ ∎

(4) Пусть Q_m - произвольный мн-н степени m. Тогда $\forall n > m$

$Q_m \perp q_n$, т.е. $\int_a^b Q_m \cdot q_n \cdot h\, dx = 0$

Док-во: Из (3) $\to$ $Q_m = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k q_k$, значит $(Q_m \cdot q_n) =$

$= (\sum_{k=0}^{m} \alpha_k q_k, q_n) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{m} \alpha_k (q_k, q_n) = 0$

(5) Если $h: (-a, a) \to R$ - чётная ф-ия, то $\forall n$ мн-н q_n содержит x только в тех степенях, которые имеют ту же чётность, что и n.

Док-во: Обозначим $\hat{q}_n(x) = (-1)^n q_n(-x)$. Нужно доказать, что $\hat{q}_n(x) = q_n(x)$. Убедимся, что $\hat{q}_0, \hat{q}_1, \dots, \hat{q}_n, \dots$ - последоват. ортогон. мн-нов с весом h на $(-a, a)$:

(1) - ортонорм - $(\hat{q}_n, \hat{q}_m) = \int_{-a}^{a} \hat{q}_n \hat{q}_m\, h\, dx = (-1)^{n+m} \int_{-a}^{a} q_n(-x) q_m(-x) h\, dx =$

$= \langle x \to -x \rangle = (-1)^{n+m} \cdot \int_{-a}^{a} q_n(x) q_m(x) \overset{\text{чётная}}{h(-x)}\, dx = \delta_{nm}$

(2) $\forall n$ $\hat{q}_n$ - многочлен степени n - очевидно

(3) старший коэф. мн-на $\hat{q}_n$ = старш. коэф. мн-на q_n

т.к. последоват. ортогон. мн-нов определена весом однозначно, то $\hat{q}_n = q_n$ ∎

(6) Трёхчленная рекуррентная ф-ла

Пусть $q_n = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots$ (*). Тогда $\forall n \geq 1$ справедливо равенство: $x \cdot q_n(x) = \frac{a_n}{a_{n+1}} q_{n+1} + \left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) q_n + \frac{a_{n-1}}{a_n} q_{n-1}$.

Док-во: $x q_n = \sum_{k=0}^{n+1} c_{n,k} \cdot q_k$ (**), где $c_{n,k} = (x q_n, q_k) =$

$$= \int_a^b x q_n \cdot q_k\, h\, dx$$

Св-ва $C_{n,k}$:

a) $C_{n,k} = C_{k,n} = (x q_k, q_n)$, очевидно

в) $C_{n,k} = 0\ \forall k \geq n+2$

c) $C_{n,k} = 0\ \forall n \geq k+2$, т.к. $C_{n,k} = C_{k,n}$ и (в) $\Big\}$ $C_{n,k} \neq 0$, $\underline{k = n, n-1, n+1}$

Чтобы найти эти коэф. подставим $(*)$ в $(**)$:

$$x(a_n x^n + b_n x^{n} + \dots) = C_{n,n+1}(a_{n+1} x^{n+1} + b_{n+1} x^n + \dots) +$$

$$+ C_{n,n}(a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots) + C_{n,n-1}(a_{n-1} x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \dots)$$

$$\begin{array}{l|l} x^{n+1} & a_n = C_{n,n+1} a_{n+1} \to C_{n,n+1} = \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \to C_{n-1,n} = \dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \overset{\shortparallel}{C_{n,n-1}} \\ x^n & b_n = C_{n,n+1} b_{n+1} + C_{n,n} a_n \to \dots C_{n,n} = \dfrac{b_n}{a_n} - \dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}} \ \blacksquare \end{array}$$

Лекция 8 (18 марта)

6.3 Св-ва нулей ортогональных многочленов

Пусть $h: (a,b) \to \mathbb{R}$ - вес и $q_0(x), q_1(x), \dots, q_n(x) \dots$ - последов. ортогональных мн-нов с весом h.

<u>Теорема</u> $\forall n$ все нули многочлена $q_n(x)$ явл. вещ., простыми, и лежат в (a,b)

Док-во: Говорят, что мн-н $q_n(x)$ меняет знак в т. $x_0 \in (a,b)$, если $\exists \varepsilon > 0$: на $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ мн-н $q_n(x)$ положителен, а на $(x_0, x_0+\varepsilon)$ он отрицателен или наоборот, т.е. он отрицателен на $(x_0-\varepsilon, x_0)$ и положителен на $(x_0, x_0+\varepsilon)$.

Заметим, что если $q_n(x)$ меняет знак в т. x_0, то $q_n(x_0)=0$. Но не всякий корень является точкой перемены знака. Убедимся, что $\forall n \geq 1$ мн-н $q_n(x)$ имеет точку перемены знака в (a,b): $0=(q_0, q_n)=\int_a^b q_0 \cdot \underbrace{q_n(x)\,h(x)}_{\text{если } q_n \text{ не имеет точек перемены знака, то это произведение } \geq 0 \text{ почти всюду или } \leq 0 \text{ почти всюду}}dx \neq$

$\neq 0$ (если нет точек перемены знака), противоречие.

Значит точки перемены знака есть.

Обозначим их $x_1, \ldots, x_m$, $m \leq n$. Допустим, что $m<n$.

Обозначим $Q_m(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)$ - мн-н степени m и $m<n \rightarrow (Q_m, q_n)=0$, а с другой стороны

$$\sum_{k=1}^{m-1} \alpha_k q_k(x)$$

$$(Q_m, q_n)=\int_a^b \underbrace{Q_m(x)\,q_n(x)\,h(x)}_{\text{сохраняет знак на }(a,b)}dx \neq 0.$$ противоречие. Значит $m=n$.

Значит корни простые. ∎

<u>Теорема</u> (без док-ва)

Корни последовательных многочленов q_n и q_{n+1} перемежаются.

6.4 Классические ортогональные мн-ны и стандартизация орт. мн-нов.

N	Название	Обозначение	Вес, $h(x)$	(a,b)	Примечания
1	Мн-н Якоби	$P_n(x,\alpha,\beta)$	$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$	$(-1,1)$	$\alpha>-1$ $\beta>-1$
2.	Мн-н Эрмита	$H_n(x)$	e^{-x^2}	$(-\infty,\infty)$	—
3.	Мн-н Лагерра	$L_n^{\alpha}(x)$	$x^{\alpha}e^{-x}$	$(0,+\infty)$	$\alpha>-1$
4. частный случай 1	Ультрасферические мн-ны или мн-ны Гегенбауэра	$C_n(x,\lambda)$	$(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$	$(-1,1)$	$\lambda>-\frac{1}{2}$
5. частный случай 4	Мн-ны Чебышёва	$T_n(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$	
6	Мн-ны Чебышёва II-го рода	$U_n(x)$	$\sqrt{1-x^2}$	$(-1,1)$	
7 частный случай 1	Мн-ны Лежандра	$P_n(x)$	1	$(-1,1)$	

Опр. Пусть $q_0, q_1, \dots, q_n, \dots$ — последовательность ортог. мн-нов и $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$ — последов. ненулевых вещ. чисел. Тогда говорят, что последов. мн-нов $\alpha_0 q_0, \alpha_1 q_1, \dots, \alpha_n q_n(x), \dots$ — получена в результате стандартизации исходных мн-нов.

Замечание. Стандартизация сохраняет большинство св-в, доказанных в 6.2–6.3. А вот трёхчленная рекурр. ф-ла как-то изменится.

Примеры стандартизации

1. $\int_a^b q_n^2(x) h(x) dx = 1$, и старш. коэф. $q_n \geq 0$

2. стар. коэф. $q_n = 1$

3. $q_n(1) = 1$

4. с помощью производящ. ф-ции

<u>Опр.</u> Ф-ия $w(t, x)$ двух переменных t и x наз-ся производящей ф-ией последов. орт. мн-нов $q_0, q_1, \dots, q_n(x), \dots$, если
$w(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n(x)}{\alpha_n} t^n$, где α_n - вещ. числа.

<u>Обзор основных св-в классич. ортог. мн-нов (без док-ва)</u>

(1) Если h - весовая ф-ия из таблицы, то $\exists\, \alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \beta_2 \in R$:
$\forall x \in (a, b)$

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x}{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2} \overset{\text{обоз.}}{=} \frac{A(x)}{B(x)} \quad (*) \text{ - ур. ие Пирсона;}$$

$\lim_{x \to a+0} h(x) B(x) = \lim_{x \to b-0} h(x) B(x) = 0$ $(**)$ - краевые условия для ур-ия Пирсона

(2) Если выполнены $(*)$ и $(**)$ хоть с какими то $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \beta_2 \in R$, то h совпадает с одной из табличных с точностью до линейной замены переменных.

(3) Если выполнены $(*)$ и $(**)$, и $q_0, q_1, \dots, q_n, \dots$ - ортог. мн-ны с весом h, то

(3.1) $q_n(x)$ явл. решением ОДУ $B(x) y''(x) + [A + B'] y' - \gamma_n y = 0$, где $\gamma_n = n(\alpha_1 + (n+1)\beta_2)$

(3.2) $q_n(x) = C_n \cdot \frac{1}{h(x)} \cdot \frac{d^n}{dx^n}[h(x) B^n(x)]$ - ф-ла Родрига

(3.3) $\forall m$ последов. $\frac{d^m}{dx^m} q_m(x), \frac{d^m}{dx^m} q_{m+1}, \dots, \frac{d^m}{dx^m} q_{m+k}, \dots$ — явл. последов. классич. ортог. мн-нов на том же (a, b), но м. б. с другим весом

(3.4) У мн-нов $q_0, q_1, \ldots, q_n, \ldots$ имеется производящая ф-ия, выражающаяся через элементарные ф-ии

(6.5) Мн-ны Лежандра: производящая ф-ия и рекурр. соотн.

Опр. $$\omega(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

План действий: Убедимся, что $\forall n$ $P_n(x)$ явл мн-ном степени n с положительным старшим коэф. Далее убедимся, что эти мн-ны ортогональны на $(-1,1)$ с весом $h \equiv 1$. Т.к. ортог мн-ны определяются весом однозначно, то коэф. $P_n(x)$ из $(*)$ совпадают с мн-нами Лежандра из таблицы.

Из ф-лы Тейлора $\to$ $P_n(x) = \dfrac{\frac{\partial^n}{\partial t^n}}{n!}\Big|_{t=0} \omega(t,x)$

$P_0(x) = \frac{1}{0!} \cdot \omega(0,x) = 1;$

$P_1(x) = x \longrightarrow (1-2tx+t^2)\frac{\partial}{\partial t}\omega(t,x) = (x-t)\,\omega(t,x).$

$P_2(x) = \dfrac{3x^2-1}{2}$ Подставим сюда $(*)$:

Могу дифф-ть степ. ряд почленно (из матана)

$$(1-2tx+t^2)\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)\, n\, t^{n-1} - (x-t)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n = 0.$$

Приведём подобные при t^k:

$t^k|$ $(k+1)P_{k+1}(x) - 2xP_k(x)\cdot k + P_{k-1}(x)(k-1) - xP_k(x) + P_{k-1}(x) = 0 \to (k+1)P_{k+1}(x) - (2k+1)xP_k(x) + P_{k-1}\cdot k = 0$ (1)

$k \geq 1$

Лемма $\forall n \geq 0$ коэф. $P_n(x)$ из $(*)$ явл. мн-ном степени n с положит. старшим коэф.

Док-во: по индукции

База: $n=0$, $n=1$: $P_0 = 1$, $P_1 = x$

Шаг: допустим, что верно для P_{n-1}, P_n. По (1) $\to P_{n+1} =$

$= \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}$ - мн-н степени $n+1$ со ст. коэф. > 0. ■

Продифф. $(*)$ по x:

$$\frac{\partial}{\partial x} w(t,x) = -\frac{1}{2}(1-2tx+t^2)^{-3/2}(-2t) \to \frac{\partial}{\partial x} w(t,x) = \frac{t}{1-2tx+t^2} w(t,x)$$