Лекция 1 (05.02.2020) Цыруљникова У.В. 18305

ФУНКАН

§5. Геометрия пространств со скалярным произведением

5.1 Линейные пространства

Опр. Линейным (или векторным) пространством наз. мн-во L, элементы кот. наз. векторами, в кот. введены две операции: сложение $x+y$ векторов x, y из L и умножение αx вектора $x \in L$ на число α (кот. м.б. вещ. или компл.), причем для этих операций выполн. след. условие:

должен лежать в L

Мн-во L с опер. сложение явл. абелевой (или коммут.) группой по сложению:

I. 1 (коммутативность) $x+y = y+x \quad \forall x, y \in L$
2 (ассоциативность сложение) $(x+y)+z = x+(y+z) \quad \forall x,y,z \in L$
3 ($\exists$ нуля) $\exists\, 0 \in L: x+0 = x \quad \forall x \in L$, 0 - нулевой вектор
4 ($\exists$ обратного вектора) $\forall x \in L \; \exists (-x) \in L$; $x+(-x)=0$

II. 1 (ассоц. отн. умн. на числа): $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \quad \forall x \in L \quad \forall \alpha, \beta$ - числа
2 (дистрибутивность умн. отн. сложение чисел) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x \quad \forall x \in L \; \forall \alpha, \beta$ - числа
3 (дистрибутивность умн. отн. сложение векторов) $\alpha(x+y) = \alpha x + \beta y \quad \forall x, y \in L \; \forall \alpha$ - число
4 (унитарность): $1 \cdot x = x \quad \forall x \in L$

Примеры лин. пр-в: (1) Мн-во направленных отрезков, отложенных из одной точки. Сложение - по правилу параллелограмма, умножение ...

(2) $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \forall k = 1, \dots n \;\; x_k \in \mathbb{C}\}$ Сложение: $x+y = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)$, умножение: $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$

(3) $l_2 = \{(x_1, \dots, x_n, \dots) \mid \forall k = 1, \dots, n, \dots \;\; x_k \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < +\infty\}$.
Сложение: $x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots x_n+y_n, \dots)$; $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots \alpha x_n, \dots)$.
Почему $x+y$ и αx лежат в l_2?

$|x_k + y_k|^2 \le (|x_k| + |y_k|)^2 = |x_k|^2 + \underbrace{2|x_k|\cdot|y_k|}_{\le |x_k|^2 + |y_k|^2} + |y_k|^2$ (полный квадрат) $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k+y_k|^2 \le 2\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 + 2\sum\limits_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 < +\infty \Rightarrow x+y \in l_2$

$|\alpha x_k|^2 = |\alpha|^2 |x_k|^2 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha x_k|^2 = |\alpha|^2 \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < +\infty \Rightarrow \alpha x \in l_2$

Дальше проверяем св-ва I.1 - I.4 и II.1 - II.4. Например, I.1:

ч.т.д. $\begin{cases} x+y = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n, \dots) \\ y+x = (y_1 \overset{\shortparallel}{+} x_1, \dots, y_n \overset{\shortparallel}{+} x_n, \dots) \end{cases}$

(4) $C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) $\mid f$ - непрерывна$\}$
$(f+g)(x) \overset{\text{опр}}{=} f(x) + g(x)$ и $(\alpha f)(x) \overset{\text{опр}}{=} \alpha f(x)$

(5) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = S(\mathbb{R}^n)$ - совокупность всех б.у. ф-ий

Примеры множеств, не явл. лин. пр-вами: (1) $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum\limits_{k=1}^{n+1} x_k^2 = 1\}$ - единичная сфера (2) Пр-во Лобачевского

Опр Конечный набор векторов $x, y, \dots, z$ из L наз. лин. независимым, если из того, что равенство $\alpha x + \beta y + \dots + \gamma z = 0$ выполняется для некоторого набора чисел $\alpha, \beta, \dots, \gamma$, следует, что $\alpha = \beta = \dots = \gamma = 0$. Иначе $x, y, \dots z$ - лин. зависимы.

Опр Бесконечный набор векторов $x, y, \dots, z, \dots$ из L наз. лин. независимым, если линейно независимым явл. любой его конечный поднабор.

Опр Говорят, что размерность пр-ва L конечна и равна n, если в L существует n лин. незав. векторов и любые $n+1$ вектор лин. зависимы.
Обозначение $\dim L = n$

Опр. Говорят, что L имеет бесконечную размерность (или L явл. бесконечномерным), если $\forall n$ в L найдется n линейно независимых векторов.
Обозначение: $\dim L = \infty$

<u>Примеры</u>: (1) $\dim \mathbb{R}^n = \dim \mathbb{C}^n = n$

(2) $\dim l_2 = \infty$; $\forall n$ положим $x_1 = (1, 0, 0, \dots 0, \dots)$, $x_2 = (0, 1, 0, \dots 0, \dots)$, … $x_n = (0, 0, \dots, 0, \overset{n\text{-е место}}{1}, 0, \dots)$
Убедимся, что $x_1, x_2, \dots x_n$ лин. независимы. Док. $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$
$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, т.е. $x_1, \dots x_n$ - лин. незав. $\Rightarrow \dim l_2 = \infty$

(3) $\dim C[a, b] = \dim S(\mathbb{R}^n) = \infty$ (самостоятельно)

Опр. Множество $M \subset L$ наз. <u>подпространством</u> пр-ва L, если M явл. лин. пр-вом относительно тех же операций сложение и умножение, кот. определены в L.

<u>Примеры подпространств</u>: (1) В любом лин. пр-ве L есть два „тривиальных" подпр-ва $= \{0\}$ и L.
(2) Совокупность всех многочленов в $C[a, b]$

5.2 Нормированные пространства

Опр Пусть L - лин. пр-во. Ф-цию $\|\cdot\| : L \to [0, +\infty)$ наз. <u>нормой</u>, если выполнены след. условие:
(1) $\forall x \in L$ имеем $\|x\| \geqslant 0$, причем $\|x\| = 0$ если и только если $x = 0$ (неотрицательность и невырожденность нормы)
(2) $\forall x \in L$ и $\forall \alpha$ - число $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ (положительная однородность нормы)
(3) $\forall x, y \in L$ имеем $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (неравенство Δ)

<u>Замечание</u>: „Норма вектора в L" - это есть обобщение понятия „длина напр. отрезка в $\mathbb{R}^3$"

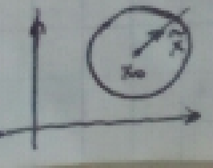
<u>Примеры нормированных пр-в</u>: (1) В $\mathbb{R}^n$ и в $\mathbb{C}^n$ любая из след. ф-ций задаёт норму: $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$ - евклидова норма, $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$, $\|x\|_0 = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$
(2) В l_2 норму можно задать равенством $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2}$
(3) В $C[a, b]$ норму можно задать равенством $\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$

Опр. Говорят, что послед-ть точек $x_1, \dots x_n, \dots$ линейного нормированного пр-ва L сх-ся к точке $x \in L$, если $\|x - x_k\| \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$
Обозначение: $\lim_{k \to \infty} x_k = x$ или $x_k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} x$

Опр. Пусть M - множество в нормированном лин. пр-ве L. Говорят, что $x \in L$ явл. предельной точкой M, если $\exists\, x_1, \dots, x_k, \dots$ такие, что (1) $\forall k\ x_k \in M$; (2) $\forall k\ x_k \neq x$; (3) $x_k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} x$

Опр. Замыканием мн-ва $M \subset L$ наз. объединение мн-ва M и мн-ва всех предельных точек мн-ва M.
Обозначение: $\operatorname{cl} M$.

<u>Примеры</u> Пусть $B(x_0, r) = \{x \in L \mid \|x - x_0\| < r\}$, где L - лин. нормир. пр-во, $x_0 \in L$; $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. $B(x_0, r)$ - открытый шар с центром в x_0 радиуса r.



Пусть $\tilde{x} \in L$: $\|\tilde{x} - x_0\| < r$. Положим $x_k = \left(1 - \frac{1}{k}\right)(\tilde{x} - x_0) + x_0$
$\|x_k - x_0\| = \left|1 - \frac{1}{k}\right| \cdot \|\tilde{x} - x_0\| < \left(1 - \frac{1}{k}\right) r < r$

Замыканием открытого шара $B(x_0, r)$ явл. мн-во $\{x \in L \mid \|x - x_0\| \le r\}$. Такое мн-во наз. замкнутым шаром с центром в т. x_0 и радиусом r. Обозн.: $\overline{B}(x_0, r)$.

Опр. Мн-во $M \subset L$ наз. замкнутым, если $\mathrm{cl}\, M = M$

Опр. Мн-во $M \subset L$ наз. плотным (или всюду плотным) в L, если $\mathrm{cl}\, M = L$

Пример: (1) $\mathbb{Q}$ - мн-во рац. чисел плотно в $\mathbb{R}$ с нормой $\|x\| = |x|$.
(2) $\mathbb{R}$ не плотно в $\mathbb{C}$ (например, возьмем точку i на компл. пл-ти: $|i - x| \ge 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$)

Опр. Нормированное пр-во L наз. сепарабельным, если в L существует счетное плотное подмножество.

Примеры сепарабельных пр-в: $\mathbb{R}$ ($\mathbb{Q}$ - счетное мн-во), $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, l_2, $C[a,b]$

Замечание: до сих пор всё было как в мат. анализе.

Задача 1: Если последовательность $x_1, \dots, x_k$ сх-ся, то этот предел всего один. Т.е. если $x_k \to x$ и $x_k \to \tilde{x}$, то $x = \tilde{x}$.

Допустим, что $x \ne \tilde{x}$. Тогда $x - \tilde{x} \ne 0$ и $\|x - \tilde{x}\| \ne 0$, т.е. $\|x - \tilde{x}\| > 0$ - обозначим её ε.
Т.к. $x_k \to x$, то для $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ $\exists n_0: \forall n \ge n_0$ $\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{3}$.
Т.к. $x_k \to \tilde{x}$, то для $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ $\exists \tilde{n}_0: \forall n \ge \tilde{n}_0$ $\|x_n - \tilde{x}\| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Тогда $\forall n \ge \max(n_0, \tilde{n}_0)$ имеет место нер-во: $\|x - \tilde{x}\| \pm x_n = \|(x - x_n) + (x_n - \tilde{x})\| \overset{\text{нер-во } \Delta}{\le}$
$\le \|x - x_n\| + \|x_n - \tilde{x}\| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2}{3}\varepsilon$. Противоречие. Значит, $x = \tilde{x}$ ч.т.д.

Задача 2 (самостоятельно): Доказать, что всякое конечномерное подпр-во нормир. лин. пр-ва замкнуто.

Пример (незамкнутое подпр-во в бесконечномерном нормированном пр-ве)

Пусть $M = \{\text{многочлены}\}$ с нормой $\|P(x)\| = \sup\limits_{x \in [a,b]} |P(x)|$

Пусть $f(x) = \sin x$. $\forall n$ разложу ее по ф-ле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = \underbrace{f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}_{\text{обозначим } P_n(x) \text{ - многочлен}} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}, \text{ где } \xi \in (0, x)$$

Убедимся, что $P_0, P_1, \dots P_n(x), \dots$ сх-ся к $f(x) = \sin x$, кот. не явл. многочленом

Вспомним, что M явл. подпр-вом в лин. нормир. пр-ве $C[a,b]$ с нормой $\|g\| = \sup\limits_{x \in [a,b]} |g(x)|$.
Ясно, что $P_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x)$ в $C[a,b]$. В самом деле: $\|f(x) - P_n(x)\| = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - P_n(x)| =$
$$= \sup_{\substack{x \in [a,b] \\ \xi \in (0,x)}} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \le \sup_{x \in [a,b]} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \le \frac{b^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0, \text{ т.к.}$$
$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| = \left| \begin{cases} \pm \sin x \\ \pm \cos x \end{cases} \right| \le 1$$
из мат. анализа мы это знаем: $\frac{b^n}{n!} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ $\forall b > 0$

Итак, мы доказали, что $P_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x)$ в $C[a,b]$. Допустим, что $P_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} P(x)$ в M, тогда оказалось бы, что $P_n \to P$ в $C[a,b]$. Тогда у нас получилось бы, что последовательность $P_1 \dots P_n$ сх-ся и к $f(x)$ и к многочлену $P(x)$. Тогда по задаче 1 $f(x) = P(x)$, т.е. $\sin x$ явл. многочленом. Значит, $P_n(x) \underset{n \to \infty}{\not\to} P(x)$.

Опр. Последовательность $x_1, \dots, x_n, \dots$ лин. нормир. пр-ва наз. фундаментальной, если

$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0: \forall n,m\geq n_0$ будет выполнено нер-во $\|x_n-x_m\|\leq\varepsilon$.

Из мат. анализа: если числовая послед-ть сх-ся, то она фундаментальна. То же самое имеет место в любом нормир. пр-ве.

Пусть $x_n\to x_0$. Тогда $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0:\forall n\geq n_0\ \|x_n-x_0\|<\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\forall\varepsilon>0\ \forall n,m\geq n_0$ имеем $\|x_n-x_m\| \pm x_0 = \|(x_n-x_0)+(x_0-x_m)\| \overset{н.т.}{\leq} \|x_n-x_0\|+\|x_0-x_m\|\leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.

Значит, $x_1,\dots x_n\dots$ – фундаментальная.

Из мат. анализа вы знаете, что для числовых последовательностей справедливо и обратное, т.е. всякая фунд. числ. послед-ть сх-ся. В произв. нормир. пр-ве это утв. может и не быть верным.

В примере с многочленом, сх-ся к $\sin x$, мы видели, что $P_n\to\sin x$ в $C[a,b]$, а значит $P_1,\dots P_n,\dots$ – фунд. в $C[a,b]$. Т.к. в пр-ве мн-ов M норма такая же как в $C[a,b]$, то $P_1\dots P_n$ – фунд. в M. Но $P_1\dots P_n$ не имеет предела в M.

Опр. Если в нормир. пр-ве всякая фунд. послед-ть сх-ся, то это пр-во наз. полным. Другое название полного нормир. пр-ва – Банахово пр-во.

Примеры банаховых пр-в: $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, C[a,b], l^2$. Важнейшим примером банаховых пр-в явл. лебеговское пр-во $L_p(D)$, где $p>1$, $D\subset\mathbb{R}^n$ – область.

$$L_p(D)\overset{опр}{=}\{f: D\to\mathbb{R} \text{ (или } \mathbb{C})\mid \int|f(x)|^p dx<+\infty\}$$

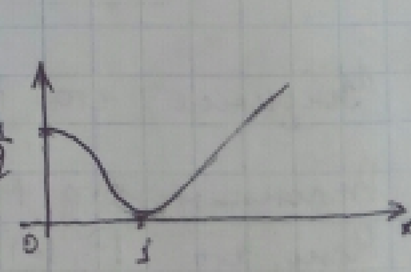
$$\|f\|_{L_p(D)}=\{\int_D|f(x)|^p dx\}^{1/p}$$

Лекция 3 (12 февраля)

Свойства лебеговских пространств:

(1) (Неравенство Гёльдера): Если $p>1$, $q>1$, $\frac1p+\frac1q=1$, $f\in L_p(D)$, $g\in L_q(D)$, тогда $f\cdot g\in L_1(D)$, причем $\|fg\|_{L_1(D)}\leq\|f\|_{L_p(D)}\cdot\|g\|_{L_q(D)}$

Идея док-ва: I шаг: $\forall a,b>0$ – вещ. числа справедливо нер-во $ab\leq\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$. Рассм. вспом. ф-цию $h(x)=\frac{x^p}{p}+\frac1q-x$.



Тогда $h(0)=\frac1q$, $\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=+\infty$ $\quad h'(x)=x^{p-1}-1=0 \Leftrightarrow x=1$

$h(1)=\frac1p+\frac1q-1=0 \Rightarrow h(x)\geq0\ \ \forall x\geq0$

Подставим $x=ab^{-q/p}$. Тогда $0\leq h(x)=\frac{a^p\cdot b^{-\frac{q}{p}\cdot p}}{p}+\frac1q-ab^{-q/p}\ \Big|\cdot pq$

$\frac{a^p}{b^q}\cdot q+p-pqab^{-q/p}\geq0\ \Big|\cdot b^q$

$qa^p+pb^q\geq pq\,ab^{q\underbrace{(1-\frac1p)}_{\frac1q}} = pqab\ \Big|\frac{1}{pq} \Rightarrow ab\leq\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$

II шаг: Положим $A=\{\int_D|f(x)|^p dx\}^{1/p}$; $B=\{\int_D|g(x)|^q dx\}^{1/q}$,

$a=\frac{|f(x)|}{A}$, $b=\frac{|g(x)|}{B}$. Из нер-ва $ab\leq\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\Rightarrow$

$\int_D\frac{|f(x)g(x)|}{AB}dx\leq \int_D\frac{\overset{=A^p}{|f(x)|^p}}{pA^p}dx+\int_D\frac{|g(x)|^q}{qB^q}dx=\frac1p+\frac1q=1\Rightarrow\int_D|f(x)g(x)|dx\leq AB$

$\Leftrightarrow \|fg\|_{L_1(D)} \leq \|f\|_{L_p(D)} \cdot \|g\|_{L_q(D)}$

Если $A=0 \Leftrightarrow f=0$ всюду, кроме н.б. мн-ва меры $0 \Rightarrow fg=0$ всюду, кроме н.б. мн-ва меры $0 \Rightarrow \int\limits_D fg\,dx=0$, а тогда нер-во Гёльдера превращается в рав-во $0=0\cdot\|g\|_{L_q(D)}$

Аналогично, если $B=0$. Нер-во Гёльдера доказано.

<u>Замечание</u>: Неравенство Гёльдера точное, т.е. если $f\notin L_p(D)$, то $\exists g\in L_q(D)$: $fg\notin L_1(D)$, т.е. $\int\limits_D |f(x)g(x)|\,dx = +\infty$

(2) (Нер-во Минковского) Если $p\geq 1$ и $f,g\in L_p(D)$, то $f+g\in L_p(D)$, причем имеет место нер-во

$$\|f+g\|_{L_p(D)} \leq \|f\|_{L_p(D)} + \|g\|_{L_p(D)}$$

<u>Замечание</u>: Нер-во Минковского выводится из нер-ва Гёльдера; при $p=1$ нер-во Минковского очевидно:

$$\|f+g\|_{L_1(D)} = \int\limits_D |f(x)+g(x)|\,dx \leq \int\limits_D |f(x)|\,dx + \int\limits_D |g(x)|\,dx = \|f\|_{L_1(D)} + \|g\|_{L_1(D)}$$

(3) $\forall p\geq 1$ $L_p(D)$ явл. полным сепарабельным линейным нормир. пр-вом с нормой $\|f\|_{L_p(D)} = \left\{\int\limits_D |f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}$

<u>Замечание</u>: В пр-ве $L_p(D)$ две ф-ии f и g считаются равными, если они совпадают всюду, кроме н.б. мн-ва меры ноль, т.е. если

$$\int\limits_D |f(x)-g(x)|\,dx=0 \Leftrightarrow \int\limits_D |f(x)-g(x)|^p\,dx=0 \Leftrightarrow \|f-g\|_{L_p(D)}=0.$$

5.3 Линейные пространства со скалярным произведением

Опр. Пусть L явл. лин. пр-вом. Говорят, что в L задано скал. пр-ие, если задана ф-ия $L\times L\to\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), которая каждой паре векторов $x,y\in L$ сопоставляет число (x,y), причем выполняются след. условия:

(1) (линейность скал. пр-ия по первому аргументу): $\forall \alpha,\beta$ - числа, $\forall x,y,z\in L$ имеет место рав-во $(\alpha x+\beta y, z) = \alpha(x,z)+\beta(y,z)$

(2) (эрмитова симметричность): $\forall x,y\in L$ имеет место рав-во $(x,y)=\overline{(y,x)}$, где черта обозначает компл. сопряжение

(3) (положительная определённость): $\forall x\in L$ справедливо нер-во $(x,x)\geq 0$, причем $(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$

<u>Примеры пр-в со скал. пр-ием</u>: 1) $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ со скал. пр-ием, заданным ф-лой $(x,y)=\sum\limits_{k=1}^n x_k\overline{y}_k$ 2) В пр-ве l_2 ф-ла $(x,y)=\sum\limits_{k=1}^\infty x_k\overline{y}_k$ задает скал. пр-ие. Почему числовой ряд сх-ся? Потому что $|x_k\overline{y}_k| = |x_k|\cdot|y_k| \leq \frac{|x_k|^2+|y_k|^2}{2} \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^\infty |x_k\overline{y}_k| \leq \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^\infty |x_k|^2 + \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^\infty |y_k|^2 < +\infty$, т.к. $x,y\in l_2 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^\infty x_k\overline{y}_k$ сх-ся абсолютно, а значит и сх-ся

Проверим выполнение свойств скал. пр-ия:

(1) $(\alpha x+\beta y, z) = \sum\limits_{k=1}^\infty (\alpha x_k+\beta y_k)\overline{z}_k = \alpha\sum\limits_{k=1}^\infty x_k\overline{z}_k + \beta\sum\limits_{k=1}^\infty y_k\overline{z}_k = \alpha(x,z)+\beta(y,z)$

(2) $(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar y_k = \overline{\sum_{k=1}^{\infty} y_k \bar x_k} = \overline{(y,x)}$

(3) $(x,x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar x_k = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \geq 0$, причем $(x,x) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = 0 \Leftrightarrow |x_k| = 0$ $\forall k \Leftrightarrow x = 0$

3) В $L_2(D)$ ф-ла $(f,g) = \int_D f(x)\overline{g(x)}\,dx$ задаёт скал. пр-ие. Почему интеграл сх-ся?

$\int_D |f(x)\overline{g(x)}|\,dx \le \int_D \frac{|f(x)|^2+|g(x)|^2}{2}\,dx < +\infty \Rightarrow \int_D f(x)\overline{g(x)}\,dx$ сх-ся абс., а значит сх-ся —"—

Проверяем св-ва скал. пр-ия: (1) $(\alpha f+\beta g, h) = \int_D (\alpha f+\beta g)\bar h\,dx = \alpha\int_D f\cdot\bar h\,dx + \beta \int_D g\cdot \bar h\,dx = \alpha(f,h)+\beta(g,h)$

(2) $(f,g) = \int_D f\bar g\,dx = \overline{\int_D g\cdot \bar f\,dx} = \overline{(g,f)}$ (3) $(f,f) = \int_D f\cdot\bar f\,dx = \int_D |f|^2\,dx \ge 0$, причем $(f,f)=0 \Leftrightarrow \int_D |f|^2\,dx = 0 \Leftrightarrow |f|^2$ равняется нулю всюду в D, кроме м.б. мн-ва меры ноль $\Rightarrow |f|$ —"— $\Rightarrow f=0$ в $L_2(D)$

В след. леммах L обозначает лин. пр-во со скал. пр-ием.

Лемма 1: $\forall x,y\in L$ и $\forall \alpha$ - числа справедливы рав-ва:

(1) $(x+y,x+y) = (x,x)+2\operatorname{Re}(x,y)+(y,y)$

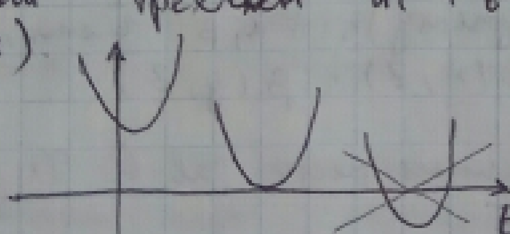
(2) $(\alpha x, \alpha x) = |\alpha|^2(x,x)$

Док-во: (1) $(x+y,x+y) \overset{01}{=} (x,x+y)+(y,x+y) \overset{02}{=} \overline{(x+y,x)}+\overline{(x+y,y)} \overset{01}{=} \overline{(x,x)} + \overline{(y,x)} + \overline{(x,y)} + \overline{(y,y)} \overset{03+02}{=} (x,x) + \underbrace{(x,y)+\overline{(x,y)}}_{2\operatorname{Re}(x,y)} + (y,y)$ ч.т.д.

(2) $(\alpha x,\alpha x) \overset{01}{=} \alpha(x,\alpha x) \overset{02}{=} \alpha\overline{(\alpha x, x)} \overset{01}{=} \alpha\cdot\bar\alpha\,(x,x) = |\alpha|^2(x,x)$ ч.т.д.

Лемма 2 (нер-во Коши-Буняковского): $\forall x,y\in L$ справедливо нер-во $|(x,y)|^2 \le (x,x)(y,y)$

Док-во: I случай: $(x,y)\in\mathbb{R}$. $\forall t\in\mathbb{R}$ рассмотрим $0 \overset{03}{\le} (x+ty, x+ty) \overset{Л1}{=} (x,x)+2\operatorname{Re}(x,ty)+t^2(y,y) = (x,x)+2t(x,y)+t^2(y,y)$ — это квадратичный трехчлен at^2+bt+c и он неотрицателен (старший коэф. положителен). Этот трехчлен или не имеет вещ. корней или имеет 1 вещ. корень $\Leftrightarrow D = b^2-4ac \le 0$



В нашем случае: $2^2(x,y)^2 \le 4\cdot(y,y)\cdot(x,x) \Rightarrow (x,y)^2 \le (x,x)(y,y)$

II случай: $(x,y)\in\mathbb{C}$. Тогда $(x,y) = re^{i\varphi}$, где $r\ge 0$ и $\varphi\in\mathbb{R}$

Лекция 4 (19 февраля)

Построим вспомогат. вектор $\tilde x = e^{-i\varphi}x$. Тогда $(\tilde x, y) = (e^{-i\varphi}x, y) = e^{-i\varphi}(x,y) = e^{-i\varphi}\cdot re^{i\varphi} = r = |(x,y)| \in \mathbb{R}$. По случаю I

$|(\tilde x,y)|^2 \le (\tilde x,\tilde x)(y,y) = (x,x)(y,y)$

$|(\tilde x,y)|^2 = |(x,y)|^2$, $\quad (\tilde x,\tilde x) = (e^{-i\varphi}x, e^{-i\varphi}x) \overset{Л1}{=} |e^{-i\varphi}|^2(x,x) = (x,x)$

Лемма 3 В любом пр-ве L со скал. пр-ием ф-ла $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ задает норму.

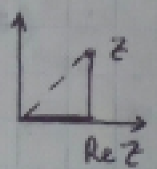
Док-во: Убедимся, что для этой ф-ии выполнены три аксиомы нормы

1) (неотриц. нормы): $\underbrace{\|x\|}_{=\sqrt{(x,x)}} \geq 0 \ \forall x \in L$ и $\underbrace{\|x\|}_{=\sqrt{(x,x)}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) (положит. однородность нормы): $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \ \forall x \in L \ \forall \alpha$ - числа

$$\sqrt{(\alpha x, \alpha x)} \overset{\Pi 1}{=} \sqrt{|\alpha|^2 (x,x)} = |\alpha| \sqrt{(x,x)}$$

3) (нер-во Δ): $\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) \overset{\Pi 1}{=} (x,x) + 2\mathrm{Re}(x,y) + (y,y) \leq \|x\|^2 + 2|\mathrm{Re}(x,y)| + \|y\|^2 \leq$



$|\mathrm{Re}(x,y)| \leq |z| = |(x,y)| \overset{КБ}{\leq} \sqrt{(x,x)\,(y,y)} = \|x\| \cdot \|y\|$

$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ч.т.д.

Замечание 1 Говорят, что норма $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ порождена скал. произведением

Замечание 2 Правильная формулировка нер-ва Коши-Буняковского: $|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Замечание 3 Любое пр-во со скал. пр-ием явл. нормированным. В частности, в нём определены понятия: предел последовательности, фунд. посл-ть, замкнутое мн-во и т.д.

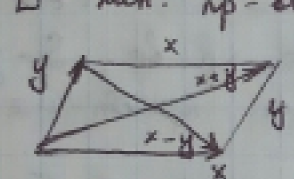
Лемма 4 Скалярное пр-ие непрерывно по первому аргументу, т.е. если $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, то $\forall y \in L$ справедливо $(x_n, y) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x,y)$.

Док-во: $|(x_n, y) - (x,y)| = |(x_n - x, y)| \overset{КБ}{\leq} \underbrace{\|x_n - x\|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ \Leftrightarrow \ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x} \cdot \|y\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ч.т.д.

Задача: Доказать, что скал. пр-ие непр. по второму аргументу и непр. по совокупности двух переменных (УПР)

Лемма 5 (Равенство параллелограмма): Пусть L - лин. пр-во со скал. пр-ием. Тогда $\forall x, y \in L$ выполняется рав-во

$$\boxed{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2}$$



$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ - норма, порожденная скал. пр-ием

Док-во: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \overset{\Pi 1}{=} \|x\|^2 + \cancel{2\mathrm{Re}(x,y)} + \|y\|^2 + \|x\|^2 + \cancel{2\mathrm{Re}\underbrace{(x,-y)}_{=-(x,y)}} + \|-y\|^2 =$
$= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ ч.т.д.

Замечание: Можно доказать и обратное, т.е. что если в нормир. пр-ве $\forall x, y$ вып-ся рав-во пар-ма, то норма в этом пр-ве порождена некоторым скал. пр-ием.

Опр Лин. пр-во со скалярным пр-ием наз. гильбертовым, если оно явл. полным относительно нормы, порожденной этим скал. пр-ием. Обозн. H (в честь D. Hilbert)

Примеры гильбертовых пр-в: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, l_2, $L_2(D)$

5.4 Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Всюду в этом пункте L - лин. пр-во со скал. пр-ием, $x, y \in L$.

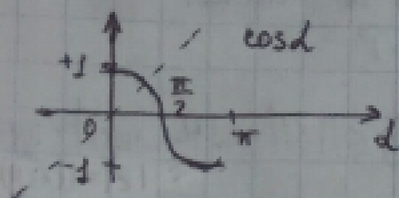
Опр Говорят, что векторы x и y ортогональны друг другу, если $(x,y) = 0$. Обозн. $x \perp y$

Упр Докажите, что нулевой вектор ортогонален любому вектору

Опр Пусть $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Углом между x и y наз. число $\varphi \in [0, \pi]$ такое, что $\cos\varphi = \dfrac{(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$

Замечание: Угол существует, т.к. $\left|\frac{(x,y)}{\|x\|\,\|y\|}\right| = \frac{|(x,y)|}{\|x\|\cdot\|y\|} \overset{КБ}{\le} 1 \Rightarrow \varphi$ найдётся

Угол определяется единственным образом $\varphi = \arccos\frac{(x,y)}{\|x\|\,\|y\|}$



Угол определен только в лин. пр-вах над $\mathbb{R}$

В вещ. пр-ве $x \perp y \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

Теорема (процесс ортогонализации Грама-Шмидта): (б/д)

Пусть L - лин. пр-во со скал. произведением и $x_1,\dots,x_n,\dots$ - послед-ть лин. незав. векторов в L. Тогда след. послед-ти обладают след. св-вами:

$y_1 = x_1$ $\qquad z_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$ нормируем y_1

проекция x_2 на z_1

$y_2 = x_2 - (x_2, z_1)z_1$ $\qquad z_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}$

. . . . .

$y_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1}(x_n, z_k)z_k$ $\qquad z_k = \frac{y_n}{\|y_n\|}$

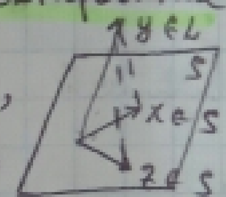
. . . . .

1) $z_1,\dots,z_n,\dots$ ортонормирована, т.е. $(z_n, z_m) = \begin{cases}0, & \text{если } m \ne n\\ 1, & \text{если } m = n\end{cases}$

2) $\forall n\ L[x_1,\dots,x_n] = L[z_1,\dots z_n] = \{\alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_n z_n \mid \alpha_1 \dots \alpha_n - \text{числа}\}$ - лин. оболочка векторов $z_1,\dots,z_n$.

5.5 Приближение векторами конечномерного подпр-ва и ортогональное проектирование

Опр. Пусть L - лин. пр-во со скал. пр-ием и S - его подпр-во. Говорят, что вектор $x \in S$ явл. вектором наилучшего приближения к вектору $y \in L$ с помощью векторов подпр-ва S, если $\forall z \in S\ \|y-x\| \le \|y-z\|$.



Другими словами: 1) x наз. ближайшим к y вектором подпр-ва S
2) $\|y-x\| = \inf\limits_{z\in S}\|y-z\|$

Лемма Пусть H - гильбертово пр-во, S - замкнутое подпр-во в H. Тогда $\forall y \in H$ $\exists!\ x \in S$ - вектор наилучш. приб-ие.

Док-во: Пусть $d = \inf\limits_{z\in S}\|y-z\|$. Выберем в S послед-ть точек $x_1,\dots,x_n,\dots$:

$\|y-x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} d$. Применим рав-во парал-ма к векторам $y-x_n$ и $y-x_m$:

$$\|(y-x_n)+(y-x_m)\|^2 + \|(y-x_n)-(y-x_m)\|^2 = 2\|y-x_n\|^2 + 2\|y-x_m\|^2 \Rightarrow$$

$$\|x_n - x_m\|^2 = 2\|y-x_n\|^2 + 2\|y-x_m\|^2 - \underbrace{\|2y-(x_m+x_n)\|^2}_{=\,2^2\left\|y-\underbrace{\frac{x_n+x_m}{2}}_{\in S}\right\|^2} \quad (*)$$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon): \forall n,m \geqslant n(\varepsilon)$

$d^2 - \varepsilon \le \|y-x_n\|^2 \le d^2 + \varepsilon$ и $d^2 - \varepsilon = \|y-x_m\|^2 \le d^2 + \varepsilon$

Из $(*) \Rightarrow \|x_n - x_m\|^2 \le 2(d^2+\varepsilon) + 2(d^2+\varepsilon) - 4d^2 = 4\varepsilon$, т.к. $\left\|y - \frac{x_n+x_m}{2}\right\|^2 \geqslant \left[\inf\limits_{z\in S}\|y-z\|\right]^2 = d^2$

$\Rightarrow x_1,\dots x_n,\dots$ фундаментальна. Т.к. H-гильбертово, т.е. полное, то всякая фунд. послед-ть в нём сх-ся. Значит, $\exists x_0 \in H: x_n \to x_0$. Но все $x_n \in S$, $x_n \to x_0$ и S - замкнутое $\Rightarrow x_0 \in S$.

Перейдём к пределу в рав-ве $\|y-x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} d$

$\downarrow_{n\to\infty}$

$\|y-x_0\| \Rightarrow x_0$ - ближайшая точка

Докажем единственность ближайшей точки (от противного).

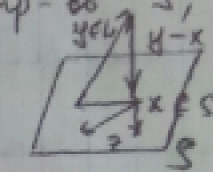
Пусть x_0 и $\tilde{x}_0$ — таковы, что $d = \inf\limits_{z\in S}\|y-z\| = \|y-x_0\| = \|y-\tilde{x}_0\|$. Подставим в (*) x_0 и $\tilde{x}_0$ вместо x_n и x_m.

$$\|x_0-\tilde{x}_0\|^2 = 2\underbrace{\|y-x_0\|^2}_{=d^2} + 2\underbrace{\|y-\tilde{x}_0\|^2}_{=d^2} - 4\underbrace{\Big\|y-\underbrace{\frac{x_0+\tilde{x}_0}{2}}_{\in S}\Big\|}_{\ge d^2} \le 2d^2+2d^2-4d^2 = 0$$

$\Rightarrow \|x_0-\tilde{x}_0\| = 0 \Rightarrow x_0-\tilde{x}_0 = 0 \Rightarrow x_0 = \tilde{x}_0$

— Лекция 5 (26 февраля) —

Опр Пусть L — лин. пр-во со скал. пр-ием и S — его лин. подпр-во. Говорят, что $x\in S$ явл. ортогональной проекцией вектора $y\in L$ на подпр-во S, если $y-x\perp z \quad \forall z\in S$



Лемма Пусть L — лин. пр-во со скал. пр-ием и S — его подпр-во. Тогда след. утв. эквивалентны:

(1) $x\in S$ явл. ортог. проекцией $y\in L$ на S;
(2) $x\in S$ явл. вектором наил. прибл. к вектору $y\in L$ с помощью векторов подпр-ва S.

Док-во будет основано на ф-ле: $\forall\, u,v\in L \quad \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\mathrm{Re}(u,v) + \|v\|^2$ (лемма 1 из п. 5.3)

(1) $\Rightarrow$ (2) $\forall z\in S$ $$\|y\underbrace{-z}_{\pm x}\|^2 = \|\underbrace{(y-x)}_{u}\underbrace{-(z-x)}_{v}\|^2 = \|y-x\|^2 - 2\mathrm{Re}\,\overbrace{(y-x,\underbrace{z-x}_{\in S})}^{=0} + \underbrace{\|z-x\|^2}_{\ge 0} \ge \|y-x\|^2 \Rightarrow (2)$$

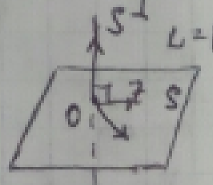
(2) $\Rightarrow$ (1) Рассмотрим вспом. ф-ию $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, определенную ф-лой $f(t) = \|y-x+tz\|^2$, где z — некот. фикс. вектор из S. Тогда f достигает минимума в т. $t=0$, т.к. $\forall t\in\mathbb{R}$ $f(t) = \|y-\underbrace{x+tz}_{\in S}\|^2 \ge \|y-x\|^2 = f(0)$ (наил. пр-ие)

$$f'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0}\frac{\|(y-x)+(tz)\|^2-\|y-x\|^2}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\|y-x\|^2+2\mathrm{Re}(y-x,tz)+\|tz\|^2-\|y-x\|^2}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0}\left[2\mathrm{Re}(y-x,z)+t\|z\|^2\right] = 2\mathrm{Re}(y-x,z) \overset{!}{=} 0$$ т.к. 0 — т. минимума $\forall z\in S$

I случай: $(y-x,z) = 0 \quad \forall z\in S \Rightarrow y-x\perp z \quad \forall z\in S \Rightarrow (1)$
II случай: $(y-x,z)\in\mathbb{C} \Rightarrow L$ — лин. пр-во над $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ применю те же рассуждения к iz $\Rightarrow \mathrm{Re}(y-x,iz) = 0$

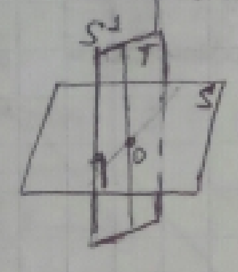
$$\mathrm{Re}(y-x,iz) = \mathrm{Re}[-i(\underbrace{y-x,z}_{a+ib})] = \mathrm{Re}[-ia+b] = b = \mathrm{Im}(y-x,z) = 0 \quad \forall z\in S \Rightarrow$$
$(y-x,z) = 0 \quad \forall z\in S \Rightarrow (1)$ ч.т.д.

Опр Пусть L — лин. пр-во со скал. пр-ием, S,T — его лин. подпр-ва. Говорят, что $S^\perp = \{x\in L \mid x\perp y \quad \forall y\in S\}$ наз. ортог. дополнением к подпр-ву S. Говорят, что L явл. прямой суммой подпр-в S и T, если $\forall x\in L\ \exists!\, y\in S\ \exists!\, z\in T:\ x = y+z$. Обозн.: $L = S\oplus T$.



Примеры $L = \mathbb{R}^3$, S — плоскость. Тогда $S^\perp$ — прямая, перпенд. этой пл-ти.

Задача: Доказать, что $\forall S$ — подпр-во в L, $S^\perp$ явл. подпр-вом в L.



Примеры Пусть $L = \mathbb{R}^3$, S — плоскость и T — еще одна плоскость.
9.9 Тогда $L = S\oplus S^\perp$, но $L\ne S\oplus T$, т.к. разложение $\underset{\in L}{x} = \underset{\in S}{y} + \underset{\in T}{z}$ не единственно

Теорема: Пусть H — гильбертово пр-во, S — замкнутое подпр-во в H. Тогда $H = S\oplus S^\perp$

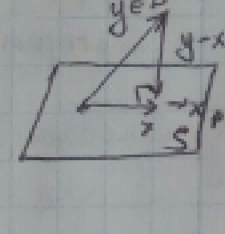
Док-во: Существование: $\underset{\in H}{x} = \underset{\in S}{y} + \underbrace{(x-y)}_{\in S^{\perp}}$ ← вектор наил. прибл. с помощью векторов S

Единственность: От противного: т.е. $\exists x \in H$ для кот. $\exists y, \tilde{y} \in S$ и $\exists z, \tilde{z} \in S^{\perp}$ также, что $y + z = x = \tilde{y} + \tilde{z} \Rightarrow \underbrace{y - \tilde{y}}_{\in S} = \underbrace{\tilde{z} - z}_{\in S^{\perp}} \Rightarrow \|y-\tilde{y}\|^2 = (y-\tilde{y}, y-\tilde{y}) =$
$= (\underbrace{y-\tilde{y}}_{\in S}, \underbrace{z-\tilde{z}}_{\in S^{\perp}}) = 0 \Rightarrow y - \tilde{y} = 0 \Rightarrow y = \tilde{y}$

Аналогично, $z = \tilde{z}$. Значит есть единственность, ч.т.д.

5.6 Проектирование на конечномерное подпр-во и нер-во Бесселя

Теорема: Пусть L – лин. пр-во со скал. пр-ием, S – конечномерное подпр-во в L, и пусть $x_1, \dots, x_n$ – ортонормированный базис в S. Тогда $\forall y \in L$ вектор, заданный ф-лой $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$, где $\lambda_k = (y, x_k)$ явл. ортогон. проекцией вектора y на S. При этом $\|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y-x\|^2$ (*)



Замечание Ф-лу (*) иногда наз. т. Пифагора

Док-во: I шаг: $\forall p = 1, \dots, n \quad y - x \perp x_p$

В самом деле, $(y-x, x_p) = (y, x_p) - \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k, x_p\right) = \lambda_p - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \overbrace{(x_k, x_p)}^{\begin{cases}0, & \text{если } k \neq p \\ 1, & \text{если } k = p\end{cases}} =$
$= \lambda_p - \lambda_p = 0$

II шаг: $\forall z \in S \quad y - x \perp z$. В самом деле, $(y-x, z) = \left(y-x, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) =$
$= \overline{\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, y-x\right)} = \overline{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (x_k, y-x)} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k}\, \underbrace{(y-x, x_k)}_{=0 \text{ по шагу I}} = 0 \Rightarrow x$ явл. ортог. проекцией

III шаг: $\|y\|^2 = \|\underset{\shortparallel}{x} + \underbrace{(y-x)}_{\perp \text{ по } \Pi 1 \text{ из п. 5.3}}\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\underbrace{(x, y-x)}_{0 \text{ по шагу II}} + \|y-x\|^2 = \|x\|^2 + \|y-x\|^2$ ч.т.д.

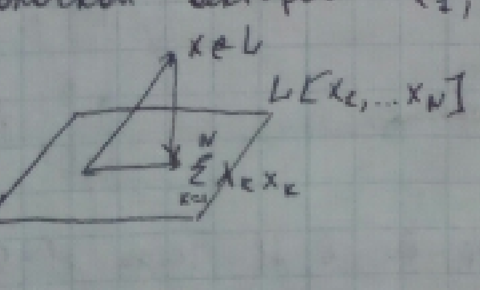
Опр. Пусть L – лин. пр-во со скал. пр-ием и пусть $x_1, \dots, x_n, \dots$ явл. ортонормированной последовательностью в L, т.е. $(x_n, x_m) = \begin{cases}0, & \text{если } m \neq n \\ 1, & \text{если } m = n\end{cases}$

Тогда говорят, что (1) $\lambda_k = (x, x_k)$ наз. коэф. Фурье вектора $x \in L$ относительно ортонормир. системы $x_1, \dots, x_n, \dots$

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$, где λ_k – коэф. Фурье вектора x, наз. рядом Фурье вектора $x \in L$ отн. ортонормир. системы $x_1, \dots, x_n, \dots$ (здесь сумма бесконечного ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$ понимается как предел конечных сумм $\sum_{k=1}^{N} \lambda_k x_k = S_N$, т.е. $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k = \lim_{N\to\infty} S_N$, т.е. $\left\|\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k - S_N\right\| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$

Теорема (нер-во Бесселя): Пусть L – лин. пр-во со скал. пр-ием, $x \in L$, $x_1, \dots, x_n, \dots$ – ортонормир. послед-ть векторов в L и $\forall k$ $\lambda_k = (x, x_k)$ – коэф. Фурье вектора x относит. ортонормир. послед-ти $x_1, \dots, x_n, \dots$. Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$ сходится и справедливо нер-во $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \leq \|x\|^2$.

Док-во: Обозн. $S_N = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k x_k$. Знаем из п. 5.5, что S_N явл. вектором наил. прибл. к вектору x с помощью векторов подпр-ва $L[x_1, \dots, x_N] = \{y \in L \mid y = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_N x_N$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ – любые числа$\}$ которое наз. лин. оболочкой векторов $x_1, \dots, x_N$.



Тогда по т. Пифагора $\|x\|^2 = \overbrace{\left\|\sum_{k=1}^{N} \lambda_k x_k\right\|^2}^{\sum_{k=1}^{N} |\lambda_k|^2} + \underbrace{\left\|x - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k x_k\right\|^2}_{\geq 0} \geq \sum_{k=1}^{N} |\lambda_k|^2 \Rightarrow$ послед-ть частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$ огр., а значит ряд сх-ся

Переходя к пределу при $N \to \infty$ в ~ нер-ве, получим нер-во Бесселя.

Лекция 6 (4 марта)

5.7 Полные и замкнутые ортонормированные системы. Рав-во Парсеваля. Гильбертов базис. Критерий полноты ортонормированной системы.

Опр. Пусть H - гильбертово пр-во и $x_1, \dots, x_n \dots$ - ортонормиров. система в H, т.е. $(x_n, x_m) = \delta_{nm} = \begin{cases} 0, \text{ если } n \neq m \\ 1, \text{ если } n = m \end{cases}$

Тогда (1) система $x_1, \dots, x_n \dots$ наз. полной, если её нельзя пополнить, т.е. если не существует ортонормиров. системы $x, x_1, \dots, x_n, \dots$ (которая и наз. пополнением системы $x_1, \dots, x_n, \dots$); другими словами, если из того, что $x \perp x_n \ \forall n$ следует, что $x = 0$.

(2) система $x_1, \dots x_n, \dots$ наз. гильбертовым базисом, если $\forall x \in H$ справедливо $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$, где $\lambda_k = (x, x_k)$ наз. коэф. Фурье вектора x относит. ортонормир. сист. $x_1, \dots, x_n \dots$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$ наз. рядом Фурье вектора x.

(3) система $x_1, \dots x_n, \dots$ наз. замкнутой, если $\forall x \in H$ вып-ся рав-во $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$, где $\lambda_k = (x, x_k)$

Теорема (критерий полноты ортонормир. системы): Пусть H - гильб. пр-во и $x_1, \dots, x_n, \dots$ - ортонормир. система в H. Тогда
(1) $x_1, \dots, x_n$ - полная (2) $x_1, \dots, x_n \dots$ - гильб. базис (3) $x_1 \dots x_n, \dots$ - замкнутая

Док-во: $(1 \Rightarrow 2)$ Дан., что $x_1, \dots, x_n, \dots$ - полная. Из нер-ва Бесселя $\Rightarrow \forall x \in H$ числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$ сх-ся и его сумма $\leq \|x\|^2$. Из критерия Коши сх-ти числовых рядов $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon): \forall n \geq n(\varepsilon) \ \forall p \geq 1 \ \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |\lambda_k|^2 < \varepsilon$.
Обозначим $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$.

Тогда $\|S_{n+p} - S_n\|^2 = \|\sum\limits_{k=1}^{n+p} \lambda_k x_k - \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\|^2 = \|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \lambda_k x_k\|^2 = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |\lambda_k|^2 \underset{\text{усл. выполнено}}{<} \varepsilon \Rightarrow$

Последовательность $x_1, \dots, x_n, \dots$ фундаментальна. По условию H - гильб., т.е. полное, т.е. всякая фундам. послед-ть в H сх-ся $\Rightarrow S_1 \dots S_n \dots$ - сх-ся, т.е. $\exists z \in H$: $z = \lim\limits_{n \to \infty} S_n = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$. Почему $z = x$?

Убедимся, что $\forall n \ x - z \perp x_n$. В самом деле,

$$(x - z, x_n) = (x, x_n) - (z, x_n) = \lambda_k - \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k, x_n\right) = \lambda_n - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overbrace{(x_k, x_n)}^{= \delta_{kn}} = \lambda_n - \lambda_n = 0$$

Т.к. $x_1, \dots, x_n, \dots$ полная, то $x - z = 0 \Rightarrow x = z = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$, где $\lambda_k = (x, x_k)$, т.е. $x_1, \dots, x_n, \dots$ - гильб. базис.

$(2 \Rightarrow 3)$ Предположим, что $x_1 \dots x_n, \dots$ - гильб. базис. Тогда $\forall x, y \in H$ обозначим $\lambda_k = (x, x_k)$ - коэф. Фурье вектора x, $\mu_k = (y, x_k)$ - коэф. Фурье вектора y, при этом $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$, $y = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k x_k$. Тогда $(x, y) = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k, y\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x_k, y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overline{\mu_k}$ -
$(x_k, y) = \overline{(y, x_k)} = \overline{\mu_k}$
это рав-во наз. рав-вом Парсеваля.

Подставим в него $x = y$: $\|x\|^2 = (x, x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$, т.е. $x_1, \dots x_n, \dots$ - замкнутая

$(3 \Rightarrow 1)$ Допустим, что $x_1, \dots, x_n, \dots$ - замкнутая и пусть $x \perp x_k \ \forall k$. Тогда $\lambda_k = (x, x_k) = 0 \ \forall k$.
Т.к. $x_1, \dots, x_k \dots$ - замкнутая, то $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ сист. $x_1, \dots, x_k, \dots$ - полная ч.т.д.

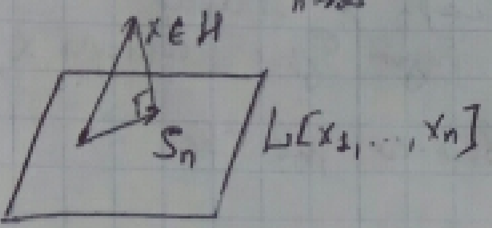
Теорема (о существовании гильбертова базиса) (без док-ва): Во всяком сепарабельном гильб. пр-ве ненулевой размерности существует гильб. базис.

Идея док-ва: Пусть $y_1, \dots, y_n, \dots$ — счётная плотная послед-ть векторов в H. $\forall n$ вычеркнем из этой послед-ти вектор y_n, если он содержится в лин. оболочке предыдущих векторов $y_1, \dots, y_{n-1}$. Останется послед-ть лин. незав. векторов. К этой новой послед-ти применим процесс ортогонализации Грама-Шмидта. То, что получится, и будет гильб. базисом.

5.8 Теорема Рисса-Фишера. Изоморфизм гильбертовых пространств.

Теорема (Рисса-Фишера): Пусть H — гильб. пр-во, $x_1, \dots, x_n, \dots$ — ортонормир. послед-ть в H и пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n \dots$ — послед-ть компл. чисел такая, что $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 < +\infty$. Тогда $\exists!\ x \in H$: $\lambda_k = (x, x_k)$ — коэф. Фурье и $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$.

Док-во: Обозначим $S_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$. Из док-ва (1⇒2) в п. 5.7 $\Rightarrow S_1, \dots, S_n \dots$ — фунд. Положим $x = \lim_{n\to\infty} S_n$. Убедимся, что x — искомый: $(x, x_k) = \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \lambda_m x_m, x_k\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \underbrace{(x_m, x_k)}_{\delta_{mk}} = \lambda_k$



По т. об элементе наил. приближения с помощью векторов из конечномерного подпр-ва $\Rightarrow S_n$ — вектор наил. прибл. к x с помощью векторов из $L[x_1, \dots, x_n]$. В том числе для S_n справедлива т. Пифагора: $\|x\|^2 = \|S_n\|^2 + \|S_n - x\|^2$, где $\|S_n\|^2 = \|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$, $\|S_n - x\|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow \|x\|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$

Докажем единственность. От противного: допустим, что $\exists\ x, \tilde{x} \in H$: $\forall k\ (x, x_k) = (\tilde{x}, x_k) = \lambda_k$ и $\|x\|^2 = \|\tilde{x}\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$. Тогда $\|x - \tilde{x}\|^2 = \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\,(x, \tilde{x}) + \|\tilde{x}\|^2$. Т.к. $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$, то $(x, \tilde{x}) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k, \tilde{x}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \underbrace{(x_k, \tilde{x})}_{= \overline{(\tilde{x}, x_k)} = \overline{\lambda_k}} = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$. Значит, $\|x - \tilde{x}\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 - 2\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 = 0$

$\Rightarrow x - \tilde{x} = 0 \Rightarrow x = \tilde{x}$ — единственность доказана.

Опр. Пусть L и K — два гильб. пр-ва. Они наз. изоморфными, если существует взаимнообратные лин. отображения $A: L \to K$ и $B: K \to L$, которые сохр. скал. пр-ие, т.е. $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$ $\forall x, y \in L$ $\forall \alpha, \beta$ — числа, $(A(x), A(y))_K = (x, y)_L$ $\forall x, y \in L$ и $B(A(x)) = x$ $\forall x \in L$ и $A(B(y)) = y$ $\forall y \in K$

Замечание: Интуитивно: L и K изоморфны, если K получено из L переобозначением: вместо $x \in L$ пишут $A(x) \in K$.

Теорема: Любое бесконечномерное сепарабельное гильбертово пр-во (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) изоморфно пр-ву l_2 (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$)

Идея док-ва: Пусть $x_1, \dots x_n \dots$ — гильб. базис в H. Зададим $A: H \to l_2$ по ф-ле $A(x) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots)$, где $\lambda_n = (x, x_n)$ — коэф. Фурье. Набор $(\lambda_1, \dots \lambda_n, \dots)$ лежит в l_2 в силу нер-ва Бесселя: $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \le \|x\|^2 < +\infty$. Отобр-ие A линейно (в силу лин. скал. пр-ия) и сохр. скал. пр-ие: $(x, y)_H \underset{\text{рав-во Парсеваля}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overline{\mu_k} = ((\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots)(\mu_1, \dots, \mu_n, \dots))_{l_2} = (A(x), A(y))_{l_2}$

Зададим отобр-ие $B: l_2 \to H$ по т. Рисса-Фишера: набору чисел $\lambda_1, \dots \lambda_n, \dots$ такому, что $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 < +\infty$ сопоставим тот единств. $x \in H$, для кот. эти числа явл. коэф. Фурье, т.е. $\lambda_k = (x, x_k)$ и $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$.

Почти очевидно, что B линейно, сохр. скал. пр-ие и явл. взаимно обратным с A. ч.т.д.

5.9 Тригонометрическая система функций как пример полной ортогональной системы в $L_2[-\pi, \pi]$

Напомним, что в $L_2[-\pi, \pi] = \{f: [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \mid \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) < +\infty\}$ скал. пр-ие задаётся ф-лой $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx$

	На языке рядов Фурье	На языке гильб. пр-в
1)	$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \pi \delta_{mn} = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx$ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx\, dx = 0$	Последов. ф-ий $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \dots$ явл. ортонормированной
2)	Коэф. Фурье ф-ии f задаются ф-лами $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx$	Коэф. Фурье ф-ии f задаются $\alpha_0 = (f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \Rightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{\alpha_0}{\sqrt{2\pi}}$ $\alpha_n = (f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \Rightarrow a_n = \frac{\alpha_n}{\sqrt{\pi}}$ $\beta_n = (f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \Rightarrow b_n = \frac{\beta_n}{\sqrt{\pi}}$
3)	Ряд Фурье $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$	Ряд Фурье $f(x) = \underbrace{\alpha_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}}_{= \frac{a_0}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\underbrace{\alpha_n \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}}_{= a_n} + \underbrace{\beta_n \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}}_{= b_n}\Big)$
4)	Равенство Ляпунова $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$	Равенство Парсеваля $\|f\|^2 = \sum$ квадратов модулей всех коэф. Ф. $= \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$ $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n^2 + \beta_n^2) = \pi\frac{a_0^2}{2} + \pi\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ $\alpha_0^2 = \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{2}a_0\right)^2$, $\alpha_n^2 = (\sqrt{\pi}a_n)^2$, $\beta_n^2 = (\sqrt{\pi}b_n)^2$

Значит, тригон. система замкнута, а значит она полна и явл. гильб. базисом в $L_2[-\pi, \pi]$

Вопрос: бывают ли другие ортонормир. базисы в $L_2[-\pi,\pi]$? Можно ли выбрать базис, состоящий из алгебраич. многочленов?

§6. Ортогональные многочлены

6.1 Ортогональные многочлены как результат ортогонализации послед-ти мономов

Опр. Ф-ия $h: (a,b) \to \mathbb{R}$ наз. весовой или весом, если
1) $h(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$;
2) $h(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$ кроме, может быть, конечного числа точек;
3) $0 < \int_a^b h(x)\,dx < +\infty$

Опр. Пусть h – весовая ф-ия. Весовым лебеговским пр-вом называют
$$\left\{ f: (a,b) \to \mathbb{R} \;\middle|\; \int_a^b f^2(x) h(x)\,dx < +\infty \right\} \qquad \text{Обозн.: } L_2^h(a,b)$$

Формула $(f,g) \overset{(*)}{=} \int_a^b f(x) g(x) h(x)\,dx$ задаёт скал. пр-ие в $L_2^h(a,b)$

Лемма (б/д): $\forall$ весовой ф-ии h пр-во $L_2^h(a,b)$ явл. гильбертовым, т.е. оно явл. лин. пр-вом, в котором $(*)$ задаёт скал. пр-ие, и которое явл. полным отн. нормы, порождённой этим скал. пр-ием.

Замечание: Если (a,b) имеет конечную длину, то $\forall n \; x^n \in L_2^h(a,b)$ т.к.
$$\max_{x \in (a,b)} |x^n| = M < +\infty \Rightarrow 0 < \int_a^b x^{2n} h(x)\,dx \leq M^2 \int_a^b h(x)\,dx.$$
Если (a,b) имеет бесконечную длину, то дополнительно требуют, чтобы h настолько быстро убывала на ∞, что $\forall n \; x^n \in L_2^h(a,b)$

Опр. Послед-ть многочленов $q_0(x), q_1(x), \dots, q_n(x), \dots$ наз. послед-тью ортог. многочленов с весом h на промежутке (a,b), если

(1) эта послед-ть ортонормирована в $L_2^h(a,b)$, т.е. $\int_a^b q_n(x)q_m(x)h(x)\,dx = \delta_{mn}$
(2) $\forall n$ $q_n(x)$ явл. мн-ном степени n;
(3) $\forall n$ старший коэф. мн-на $q_n(x)$ положителен

6.2 Общие свойства ортогональных многочленов

Здесь $h: (a,b) \to \mathbb{R}$ - вес, $q_0, q_1, \dots, q_n, \dots$ - послед-ть ортог. мн-нов с весом h на (a,b)

Общие св-ва ортог. мн-нов:

(1) $\forall h$ существует последов. ортогон. мн-нов

Док-во: Возьмём последовательность мономов $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ и ортогонализуем её по Граму - Шмидту.

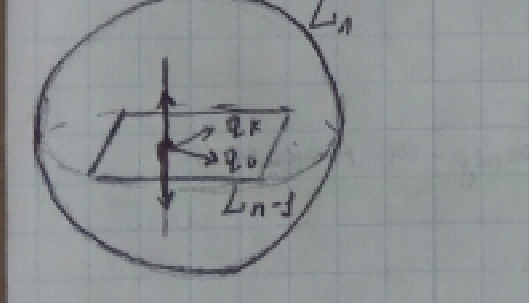
(2) Послед-ть ортогон. мн-нов определяется весом однозначно

Док-во: $\overbrace{L[q_0, q_1(x), \dots, q_n(x)] = L[1, x, x^2, \dots, x^n]}^{\text{обозн. } L_n}$, т.к. $\subset$ - очевидно и $\supset$ - по индукции

База индукции: $L[q_0] \supset L[1]$ - очевидно. Шаг индукции: Допустим для некот. n $L[q_0, \dots q_n] \supset L[1, x \dots x^n]$ и докажем это же включение для $n+1$: $\underbrace{\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n}_{\in L[q_0, \dots q_n] \text{ - по предпол.}} + \alpha_{n+1} x^{n+1}$; $q_{n+1}(x) = \beta_{n+1} x^{n+1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \beta_k x^k}_{\in L[q_0, \dots q_n]}$

$$\Rightarrow P(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k + \alpha_{n+1}\left(\frac{1}{\beta_{n+1}} q_{n+1}(x) - \frac{1}{\beta_{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \beta_k x^k\right) \in L[q_0, q_1, \dots q^{n+1}]$$

$\dim L_n = n+1$;
$\dim L_{n-1} = n$



Допустим, что мн-ны $q_0, q_1(x), \dots, q_{n-1}(x)$ уже определены весом h однозначно.

Ортогон. дополнение к L_{n-1} в L_n имеет размерность 1.

Значит, в L_n есть ровно два единичных вектора, перпендикулярных L_{n-1}, причем только один из этих векторов-многочленов имеет положит. старший коэф.

(3) Любой многочлен Q_n степени n может быть представлен в виде лин. комб. мн-нов $q_0, q_1(x), \dots, q_n(x)$

Док-во уже приведено выше: $Q_n \in L[1, x, \dots, x^n] = L[q_0, \dots, q_n]$

(4) Пусть Q_m - произв. мн-н степени m. Тогда $\forall n > m$ $Q_m \perp q_n$, т.е. $\int_a^b Q_m(x) q_n(x) h(x)\,dx = 0$

Док-во: Из (3) $\Rightarrow$ $Q_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k q_k(x)$. Значит, $(Q_m, q_n) = \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k q_k, q_n\right) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \underbrace{(q_k, q_n)}_{= 0, \text{ т.к. } m<n, \text{ т.е. } m \neq n} \overset{!}{=} 0$

(5) Если $h: (-a, a) \to \mathbb{R}$ - четная ф-ия, то $\forall n$ мн-н $q_n(x)$ содержит x только в тех степенях, которые имеют ту же четность, что и n, т.е $q_n(-x) = (-1)^n q_n(x)$

Док-во: Обозначим $\tilde{q}_n(x) = (-1)^n q_n(-x)$. Нужно доказать, что $\tilde{q}_n(x) = q_n(x)$. Убедимся, что $\tilde{q}_0(x), \tilde{q}_1(x), \dots, \tilde{q}_n(x), \dots$ - послед-ть ортогон. мн-нов с весом h на $(-a, a)$:

(1) ортонормированность - $(\tilde{q}_n(x), \tilde{q}_m(x)) = \int_{-a}^{a} \tilde{q}_n(x) \tilde{q}_m(x) h(x)\,dx = \int_{-a}^{a} (-1)^n q_n(-x)(-1)^m q_m(-x) h(x)\,dx$

$$\overset{\text{замена } x \to -x}{=} -(-1)^{n+m} \int_{a}^{-a} q_n(x) q_m(x) \underbrace{h(-x)}_{= h(x), \text{ т.к. } h \text{ - четн.}}\,dx = (-1)^{n+m} \int_{-a}^{a} q_n(x) q_m(x) h(x)\,dx = \delta_{nm}$$

(2) $\forall n$ $\tilde{q}_n(x)$ - мн-н степ. n

(3) старший коэф. мн-на $\tilde{q}_n(x)$ = ст. коэф. мн-на $q_n(x) > 0$

т.к. послед-ть ортог. мн-нов определяется весом однозначно, то $\tilde{q}_n(x) = q_n(x)$ ч.т.д.

(6) (Трехчленная рекуррентная ф-ла). Пусть $q_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \ldots$ (*). Тогда $\forall n \geq 1$ справедливо $\boxed{x q_n(x) = \frac{a_n}{a_{n+1}} q_{n+1}(x) + \left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) q_n(x) + \frac{a_{n-1}}{a_n} q_{n-1}(x)}$

Док-во: $x q_n(x) \overset{(**)}{=} \sum_{k=0}^{n+1} c_{n,k}\, q_k(x)$, где $c_{n,k} = (x q_n(x), q_k(x)) = \int_a^b x q_n(x) q_k(x) h(x)\, dx$

Св-ва $c_{n,k}$: (a) $c_{n,k} = c_{k,n} = \int_a^b x q_k(x) q_n(x) h(x)\, dx$

(b) $c_{n,k} = 0 \quad \forall k \geq n+2$

(c) $c_{n,k} = 0 \quad \forall n \geq k+2$, т.к. $c_{n,k} = c_{k,n}$ и (b)

$\Rightarrow c_{n,k} = 0$ для всех k, кроме $k = n-1, n, n+1$!

Чтобы найти эти коэф., подставим ф-лу (*) в (**): $x(a_n x^n + b_n x^{n-1} + \ldots) =$
$= c_{n,n+1}(a_{n+1} x^{n+1} + b_{n+1} x^n + \ldots) + c_{n,n}(a_n x^n + b_n x^{n-1} + \ldots) + c_{n,n-1}(a_{n-1} x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \ldots)$

x^{n+1} | $a_n = c_{n,n+1} a_{n+1} \Rightarrow c_{n,n+1} = \frac{a_n}{a_{n+1}} \Rightarrow \underset{\overset{(a)}{=}\, c_{n,n-1}}{c_{n-1,n}} = \frac{a_{n-1}}{a_n}$

x^n | $b_n = c_{n,n+1} b_{n+1} + c_{n,n} a_n \Rightarrow \ldots \quad c_{n,n} = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$

Лекция 8 (18 марта)

6.3 Свойства нулей ортогональных многочленов

Пусть $h: (a,b) \to \mathbb{R}$ - вес и $q_0(x), q_1(x), \ldots, q_n(x) \ldots$ - послед-ть ортогон. мн-нов с весом h

Теорема $\forall n$ все нули многочлена $q_n(x)$ явл. вещественными, простыми и лежат в (a,b)

Док-во: Говорят, что мн-н $q_n(x)$ меняет знак в т. $x_0 \in (a,b)$, если $\exists \varepsilon > 0$: на $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ мн-н $q_n(x)$ положителен, а на $(x_0, x_0+\varepsilon)$ он отрицателен или наоборот, т.е. он отриц. на $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ и положителен на $(x_0, x_0+\varepsilon)$.

Заметим, что если $q_n(x)$ меняет знак в т. x_0, то $q_n(x_0) = 0$. Но не всякий корень является точкой перемены знака. Убедимся, что $\forall n \geq 1$ мн-н $q_n(x)$ имеет точку перегиба знака в (a,b): $0 = (q_0, q_n) = \int_a^b q_0 \cdot \underbrace{q_n(x)\, h(x)}\, dx \neq 0$
(если нет точек перемены знака), противоречие.

если q_n не имеет точек перемены знака, то это ф-ция >0 также всюду или <0 также всюду.

Значит, точки перемены знака есть.
Обозначим их $x_1, \ldots, x_m$, $m \leq n$. Допустим, что $m < n$.

Обозначим $Q_m(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_m)$ - мн-н степени m и $m < n$
$\Rightarrow (Q_m, q_n) = 0$, а с другой стороны
$\sum_{k=1}^{m} d_k q_k(x)$

$(Q_m, q_n) = \int_a^b \underbrace{Q_m(x) q_n(x) h(x)}_{\text{сохраняет знак на } (a,b)} dx \neq 0$ - противоречие $\Rightarrow m = n$

Значит, корни простые

Теорема (б/д): Корни последовательных мн-нов q_n и q_{n+1} перемежаются.

6.4 Классические ортогональные многочлены и стандартизация ортог. мн-ков.

N	Название	Обозначение	Вес, $h(x)$	(a, b)	Примечание
1	Мн-н Якоби	$P_n(x, \alpha, \beta)$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$	$(-1, 1)$	$\alpha > -1$, $\beta > -1$
2	Мн-н Эрмита	$H_n(x)$	e^{-x^2}	$(-\infty, \infty)$	—
3	Мн-н Лагерра	$L_n^\alpha(x)$	$x^\alpha e^{-x}$	$(0, +\infty)$	$\alpha > -1$
4 (ч. сл. 1)	Ультра сферические мн-ны или мн-ны Гегенбауэра	$C_n(x, \lambda)$	$(1-x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}$	$(-1, 1)$	$\lambda > -\frac{1}{2}$
5 (ч. сл. 4)	Мн-ны Чебышева	$T_n(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	
6	Мн-ны Чебышева II-го рода	$U_n(x)$	$\sqrt{1-x^2}$	$(-1, 1)$	
7 (ч. сл. 1)	Мн-ны Лежандра	$P_n(x)$	1	$(-1, 1)$	

Опр. Пусть $q_0, q_1, \dots, q_n, \dots$ - послед-ть ортог. мн-нов и $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$ - послед-ть ненулевых вещ. чисел. Тогда говорят, что послед-ть мн-нов $\alpha_0 q_0, \alpha_1 q_1, \dots, \alpha_n q_n(x)$ получена в результате стандартизации исходных мн-нов.

Замечание: Стандартизация сохраняет большинство св-в, доказанных в 6.2-6.3. А вот трехчленная рекур. ф-ла как-то изменится.

Примеры стандартизации: 1. $\int_a^b q_n^2(x) h(x) dx = 1$ и старш. коэф. $q_n \geqslant 0$

2. старший коэф. $q_n = 1$ 3. $q_n(1) = 1$ 4. с помощью производящей ф-ии

Опр. Ф-ия $w(t, x)$ двух переменных t и x наз. производящей ф-ией послед-ти ортог. мн-нов $q_0, q_1, \dots, q_n(x), \dots$, если
$w(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n(x)}{\alpha_n} t^n$, где α_n - вещ. числа

Обзор основных свойств классических ортог. мн-нов (б/д)

(1) Если h - весовая ф-ия из таблицы, то $\exists\, \alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} : \forall x \in (a, b)$

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x}{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2} \overset{\text{обозн.}}{=} \frac{A(x)}{B(x)} \quad (*) \text{ - ур-ие Пирсона}$$

$\lim\limits_{x \to a+0} h(x) B(x) = \lim\limits_{x \to b-0} h(x) B(x) = 0$ $(**)$ - краевые усл. для ур-ия Пирсона

(2) Если выполнены $(*)$ и $(**)$ хоть с какими-то $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, то h совпадает с одной из табличных с точностью до линейной замены переменных.

(3) Если выполнены $(*)$ и $(**)$, и $q_0, q_1, \dots, q_n, \dots$ - ортог. мн-ны с весом h, то

(3.1) $q_n(x)$ явл. решением ОДУ $B(x) y''(x) + [A + B'] y' - \gamma_n y = 0$,
где $\gamma_n = n(\alpha_1 + (n+1)\beta_2)$

(3.2) $q_n(x) = c_n \cdot \frac{1}{h(x)} \cdot \frac{d^n}{dx^n}[h(x) B^n(x)]$ - ф-ла Родрига

(3.3) $\forall m$ послед-ть $\frac{d^m}{dx^m} q_m(x), \frac{d^m}{dx^m} q_{m+1}, \dots, \frac{d^m}{dx^m} q_{m+k}, \dots$ - явл. послед-тью классич. ортог. мн-нов на том же (a,b), но м.б. с другим весом

(3,4) У мн-нов $q_0, q_1, \dots, q_n, \dots$ имеется производящая ф-ия, выражающаяся через элементарные ф-ии

6.5 Многочлены Лежандра: производящая ф-ия и рекуррентные соотношения

Опр. $\omega(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$ - производящая ф-ия многочленов Лежандра [*]

План действий: Убедимся, что $\forall n$ $P_n(x)$ явл. мн-ном степени n с положительным старшим коэф. Далее убедимся, что эти мн-ны ортогональны на $(-1,1)$ с весом $h \equiv 1$. Т.к. ортог. мн-ны определяются весом однозначно, то коэф. $P_n(x)$ из (*) совпадают с мн-нами Лежандра из таблицы.

Из ф-лы Тейлора $\to P_n(x) = \frac{\frac{\partial^n}{\partial t^n}\big|_{t=0}}{n!} \omega(t,x)$

$P_0(x) = \frac{1}{0!} \cdot \omega(0,x) = 1$;

$P_1(x) = x \quad \to (1-2tx+t^2) \frac{\partial}{\partial t} \omega(t,x) = (x-t)\, \omega(t,x)$

$P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}$ Подставим сюда (*):

Могу диф-ть степ. ряд почленно (из матана)

$(1-2tx+t^2) \sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n(x)\, n t^{n-1} - (x-t) \sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n = 0$

Приведем подобные при t^k:

$t^k \,|\; (k+1) P_{k+1}(x) - 2x P_k(x) \cdot k + P_{k-1}(k-1) - x P_k(x) + P_{k-1}(x) = 0$

$\to \boxed{(k+1) P_{k+1}(x) - (2k+1) x P_k(x) + k P_{k-1}(x) = 0} \quad (1) \qquad k \geq 1$

Лемма: $\forall n \geq 0$ коэф. $P_n(x)$ из (*) явл. мн-ном степени n с положительным старшим коэф.

Док-во: по индукции

База: $n=0, n=1$: $P_0 = 1$, $P_1 = x$

Шаг: допустим, что верно для P_{n-1}, P_n. По (1) $\to P_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}$ - мн-н степени $n+1$ со ст. коэф. >0

Продиф-ем (*) по x: $\frac{\partial}{\partial x} \omega(t,x) = -\frac{1}{2}(1-2tx+t^2)^{-\frac{3}{2}}(-2t) \to \frac{\partial}{\partial x}\omega(t,x) = \frac{t}{1-2tx+t^2}\omega(t,x)$

т.е. $(1-2tx+t^2) \frac{\partial \omega}{\partial x} - t\omega = 0$

Лекция 9 (25 марта)

Подставим ф-лу [*] в последнее равенство:

$(1-2tx+t^2) \underbrace{\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n'(x) t^n}_{k=n+1} - t \underbrace{\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n}_{k=n+1} = 0$

Приведем подобные при t^k:

$t^k \,|\; P_k'(x) - 2x P_{k-1}'(x) + P_{k-2}'(x) - P_{k-1}(x) = 0$

$$P_k'(x) - 2xP_{k-1}'(x) + P_{k-2}'(x) - P_{k-1}(x) = 0 \qquad (2) \qquad \forall k \geq 2$$

Преобразуем (2) к более симметричному виду.

$$\frac{d}{dx}(1) \Rightarrow (k+1)P_{k+1}' - (2k+1)P_k - (2k+1)xP_k' + kP_{k-1}' = 0 \;|\cdot 1 \qquad |1$$

$$\left((k+1)P_{k+1}(x) - (2k+1)xP_k(x) + kP_{k-1}(x) = 0 \right) \qquad - \qquad +$$

$$\text{в } (2) \; k \xrightarrow{\text{замена}} k+1 \Rightarrow P_{k+1}' - P_k - 2xP_k' + P_{k-1}' = 0 \quad |\cdot(k+1) \qquad |\cdot k$$

Хочу взять лин. комбинацию так, чтобы сначала избавиться от P_{k+1}', а затем от P_{k-1}'

$$[-(2k+1)+(k+1)]P_k - x[(2k+1)-2(k+1)]P_k' + [k-(k+1)]P_{k-1}' = 0$$

$$-kP_k + xP_k' - P_{k-1}' = 0 \qquad (3)$$

$$(k+1-k)P_{k+1}' - [(2k+1)-k]P_k - x[(2k+1)-2k]P_k' = 0$$

$$P_{k+1}' - (k+1)P_k - xP_k' = 0 \qquad (4)$$

Сложим (3) и (4) $\Rightarrow P_{k+1}' - (2k+1)P_k - P_{k-1}' = 0$

т.е. $\boxed{(2k+1)P_k = P_{k+1}' - P_{k-1}'}$ (5) – это второе рекуррентное ф-ла для многочленов Лежандра

6.6 Многочлены Лежандра: дифференциальное ур-ие и соотношение ортогональности

В п. 6.5 мы вывели несколько рекур. соотношений, в т.ч. (3) и (4):

$$-kP_k + xP_k' - P_{k-1}' = 0 \quad (3) \qquad P_{k+1}' - (k+1)P_k - xP_k' = 0 \quad (4)$$

Ф-лу (3) умножим на -1 и сделаем замену $n=k$; в ф-ле (4) сделаем замену $n=k+1$. Получим

$$nP_n - xP_n' + P_{n-1}' = 0 \quad |\cdot x$$
$$+$$
$$P_n' - nP_{n-1} - xP_{n-1}' = 0 \quad |\cdot 1$$

$$(1-x^2)P_n' + xnP_n - nP_{n-1} = 0 \;\Big|\frac{d}{dx} \rightarrow [(1-x^2)P_n']' + nP_n + x\cancel{n}P_n' - \underbrace{nP_{n-1}'}_{\substack{\text{из (3)} \\ \parallel \\ \cancel{x P_n'} - nP_n}} = 0$$

Значит, $[(1-x^2)P_n']' + (n+n^2)P_n = 0$

т.е. $y(x) = P_n(x)$ уд. диф. ур-ию: $\boxed{[(1-x^2)y'(x)]' + n(n+1)y(x) = 0}$

Чтобы вывести соотношение ортогональности, запишем д.у., которым удовлетворяют $P_n(x)$ и $P_m(x)$:

$$[(1-x^2)P_n']' + n(n+1)P_n = 0 \quad |\cdot P_m$$
$$-$$
$$[(1-x^2)P_m']' + m(m+1)P_m = 0 \quad |\cdot P_n$$

$$\underbrace{[(1-x^2)P_n']'P_m - [(1-x^2)P_m']'P_n}_{\text{обозн.}\; A} + \underbrace{[n(n+1)-m(m+1)]P_nP_m}_{\text{обозн.}\; B} = 0 \qquad (*)$$

Преобразуем A и B:

$$[(1-x^2)(P_n' P_m - P_n P_m')]' = [\underbrace{(1-x^2)P_n'} P_m - \underbrace{(1-x^2)P_m'} P_n]' =$$

$$= [(1-x^2)P_n']' P_m + \cancel{(1-x^2) P_n' P_m'} - [(1-x^2)P_m']' P_n - \cancel{(1-x^2) P_m' P_n'} = A;$$

$$B = n^2+n-m^2-m = (n^2-m^2)+(n-m) = (n-m)(n+m)+(n-m) =$$
$$= (n-m)(n+m+1)$$

Проинтегрировав (*) по $[-1, 1]$, получим

$$\underbrace{\int_{-1}^{1} [(1-x^2)(P_n' P_m - P_n P_m')]' dx}_{\parallel} + (n-m)(n+m+1)\int_{-1}^{1} P_n P_m \, dx = 0$$

$$(1-x^2)(P_n' P_m - P_n P_m')\Big|_{-1}^{1} = 0$$

Значит, если $m \neq n$, то $\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = 0$

т.е. P_n и P_m ортогональны на $[-1, 1]$ с весом $h(x) = 1$

Чтобы найти норму $P_n(x)$, вычислим $\|P_n\|^2 = (P_n, P_n) = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, dx$ с помощью трехчленной рекуррентной ф-лы (1) из 6.5:

хотим избавиться, т.к. $x \cdot P_n$

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)x P_n + n P_{n-1} = 0 \quad | \cdot (2n-1)P_{n-1}$$

$\ominus$

Сделаем в ней замену: будем писать n вместо $n+1$. Получим

$$n P_n - (2n-1)x P_{n-1} + (n-1)P_{n-2} = 0 \quad | \, (2n+1)P_n$$

$$(n+1)(2n-1)P_{n+1}P_{n-1} + n(2n-1)P_{n-1}^2 - n(2n+1)P_n^2 - (2n+1)(n-1)P_n P_{n-2} = 0$$

Теперь проинтегрируем по $[-1, 1]$ и воспользуемся ортогональностью, т.е. $\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) = 0$ при $m \neq n$:

$$\cancel{n}(2n-1)\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2\, dx - \cancel{n}(2n+1)\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, dx = \frac{2n-1}{2n+1}\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x)\, dx = \frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{2n-3}{2n-1}\int_{-1}^{1} P_{n-2}^2(x)\, dx = \ldots =$$

$\forall n \geq 2$, т.к. в ходе вычислений был P_{n-2}

$$= \frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{2n-3}{2n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{5}\underbrace{\int_{-1}^{1} P_1^2(x)\, dx}_{=\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}} = \frac{2}{2n+1}$$

при $n=2$

коэф $\frac{2n-1}{2n+1}$

Итог: $\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$ – соотношение ортогональности для многочленов Лежандра, стандартизированных с помощью производящей ф-ции

Тем самым мы закончили реализовывать идею, высказанную в п. 6.5 о том, что коэф-ты в разложении $w(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$ явл. ортогональными многочленами на $[-1, 1]$ с весом 1, т.е. заслуживают название мн-нов Лежандра, стандартизированных с помощью производящей функции.

6.7 Многочлены Лежандра: формула Родрига и теорема о разложении функции в ряд по многочленам Лежандра

Теорема (ф-ла Родрига): $\forall n \geq 0$ справедливо равенство

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n], \quad (*)$$

где P_n – многочлены Лежандра, станд-ные с помощью производящей ф-ии

Идея док-ва: Обозначим правую часть рав-ва (*) через Q_n. Затем докажем, что Q_n – многочлен степени n с положительным старшим коэф. и $\int_{-1}^{1} Q_n(x) Q_m(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$, т.е. Q_n ортогональны на $[-1,1]$ и имеют ту же длину (норму), что и P_n. Поскольку ортог. мн-ны определяются своим весом однозначно, то $P_n = Q_n$, т.е. ф-ла (*) доказана.

То, что $Q_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$ явл. мн-ом степени n с положит. старшим коэф – очевидно

Интеграл $\int_{-1}^{1} Q_n(x) Q_m(x)\,dx$; его вычисление мы опустим

Теорема (о разложении функции в ряд по многочленам Лежандра):

Пусть $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ – непрерывно диф-мая ф-ия. Тогда $\forall x\in[-1,1]$ справедливо равенство
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) \qquad (**)$$
где P_n – многочлен Лежандра, стандартизованный с помощью производящей ф-ии, а
$$c_n = \frac{(f,P_n)}{(P_n,P_n)} = \left(n+\frac12\right)\int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\,dx$$

т.к. посл-ть полиномов полна

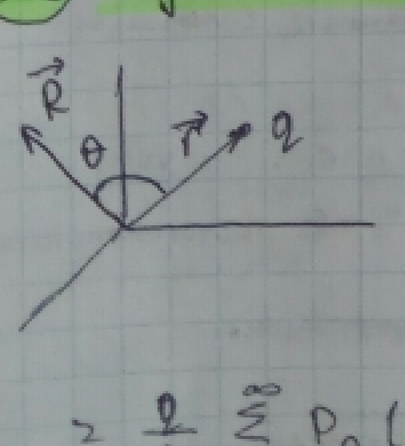
Идея док-ва: Поскольку ортонормированная система $\frac{P_0}{\|P_0\|}, \frac{P_1(x)}{\|P_1\|}, \dots, \frac{P_n(x)}{\|P_n\|}, \dots$ полна в $L_2[-1,1]$, то любую ф-ию $f\in L_2[-1,1]$ можно представить в этом пр-ве в виде ряда $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{P_n(x)}{\|P_n(x)\|}$, где λ_n – коэф. Фурье ф-ии f относительно ортонорм. сист. $\frac{P_0}{\|P_0\|}, \frac{P_1(x)}{\|P_1\|}, \dots, \frac{P_n(x)}{\|P_n\|}, \dots$

Поэтому $\lambda_n \frac{1}{\|P_n\|} = \left(f, \frac{P_n}{\|P_n\|}\right)\frac{1}{\|P_n\|} = \frac{(f,P_n)}{\|P_n\|^2} = c_n$

где $c_n = \frac{(f,P_n)}{(P_n,P_n)}$. Поэтому ф-ла (**) в $L_2[-1,1]$ очевидна (т.е. норма разности в L_2 = 0)

Доказывать равенство (**) поточечно не будем.

6.8 Мультипольное разложение Кулоновского потенциала



Пусть $R = |\vec R|$, $r = |\vec r|$, θ – угол между $\vec r$ и $\vec R$ и $\vec R > r$

Потенциал эл. поля, создаваемого в т. $\vec R$ зарядом q, помещенном в т. $\vec r$, задаётся ф-ей
$$\Phi = \frac{q}{|\vec R - \vec r|} \overset{\text{т. cos}}{=} \frac{q}{\sqrt{R^2 - 2Rr\cos\theta + r^2}} = \frac{q}{R}\frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r}{R}\cos\theta + \left(\frac{r}{R}\right)^2}} =$$
$$= \frac{q}{R}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{r}{R}\right)^n$$

производящая ф-ия мн-ов Лежандра

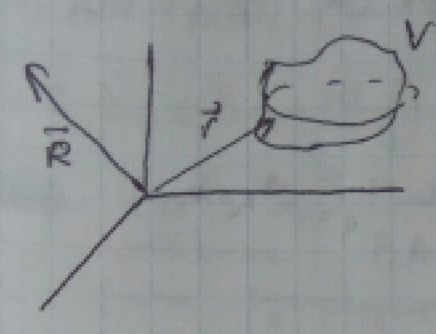
Если $R > r$, то этот ряд сх-ся абсолютно (⇒ просто сх-ся), т.к. можно доказать, что $\forall x \in [-1,1]$
$$|P_n(x)| \le 1, \qquad (*)$$

а значит $\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(\cos\theta)| \left(\frac{r}{R}\right)^n \le \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n < +\infty$

← геом. прогрессия

Нер-во (*) доказывается непросто и мы это док-во опускаем, и на экзамене его не будет

Более физическая ситуация — заряд „размазан" в конечной обл-ти $V \subset \mathbb{R}^3$ с плотностью $\rho(\vec r)$. Наблюдатель находится в т. $\vec R$, причем $R > r$



Тогда потенциал задается ф-лой

$$\Phi(\vec R) = \iiint_V \frac{\rho(\vec r)}{|\vec R - \vec r|}\, dV = \iiint_V \frac{\rho(\vec r)}{R} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{r}{R}\right)^n dV =$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{R^{n+1}}}, \text{ где } b_n = \iiint_V \rho(\vec r) P_n(\cos\theta)\, r^n\, dV$$

асимптотическая ф-ла для разложения потенциала на бесконечности

Вспоминается, что $P_0 = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}$, можем написать ф-лы для первых коэф. b_n:

$b_0 = \iiint_V \rho(\vec r)\, dV$ — полный заряд

$b_1 = \iiint_V \rho(\vec r)\, r\cos\theta\, dV$ — дипольный момент

$b_2 = \iiint_V \rho(\vec r)\, r^2\, \frac{3\cos^2\theta - 1}{2}$ — квадрупольный момент

§7 Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах

7.1 Линейные операторы и их общие свойства

В этом пункте H_1 и H обозн. гильб. пр-ва

Опр. Отображение $A: H \to H_1$ наз. лин. оператором, если $\forall x, y \in H$ и $\forall \alpha, \beta$ — числа справедливо равенство

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

Замечание: 1) Если аргумент лин. оператора „простой", то пишут Ax вместо $A(x)$

2) Вместо „лин. оператор" — просто „оператор", не рассм. нелин. операторы

Примеры лин. операторов: (1) [Тождественный оператор I:]

$I: H \to H \quad Ix = x \quad \forall x \in H$

$I(\alpha x + \beta y) \overset{\text{опр}}{=} \alpha x + \beta y = \alpha I x + \beta I y$ — линейность

(2) [Нулевой оператор O:]

$O: H \to H_1 \quad Ox = 0 \in H_1 \quad \forall x \in H$

упр: линейность

(3) [Конечномерный оператор и его матрица:]

Пусть $x_1, \dots, x_n$ — ОНБ в H (в частности, $\dim H = n < +\infty$) и пусть $y_1, \dots, y_m$ — ОНБ в H_1 ($\dim H_1 = m < +\infty$). Пусть $A: H \to H_1$ — лин. оператор.

Тогда $\forall x \in H$ $\exists!$ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ - числа такие, что $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$
и $Ax = A\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \underbrace{A x_j}_{\in H_1}$. Т.к. $Ax_j \in H_1$, то $\exists!$ a_{kj} - числа такие, что $Ax_j = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} y_k$. Следовательно,

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left[\sum_{k=1}^{m} a_{kj} y_k\right] = \sum_{k=1}^{m} \underbrace{\left[\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \lambda_j\right]}_{= \text{обозн. } \mu_k \text{ - числа}} y_k = \sum_{k=1}^{m} \mu_k y_k = y$$

Значит, $A: H \to H_1$ порождает отображение коэф-ов разложение векторов $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$ и $Ax = y = \sum_{k=1}^{m} \mu_k y_k$ по базисам: $\mu_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \lambda_j$.

Это равенство можно записать в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

матрица оператора A в базисах $x_1, \dots, x_n$ и $y_1, \dots, y_m$

(4) [Оператор ортогонального проектирование:]

Пусть S - замкнутое подпр-во в H. Из п. 5.5 знаем, что $\forall x \in H$ $\exists!$ $y \in S$, который явл. ортог. проекцией вектора x на S. Зададим оператор $P: H \to S$ ортог. проектирование на S с помощью ф-лы $Px = y$.

Пусть $x_1, x_2 \in H$. Знаем, что $\forall j = 1, 2$ $\exists!$ $y_j \in S$ и $\exists!$ $z_j \in S^{\perp}$ такие, что $x_j = y_j + z_j$, при этом $Px_j = y_j$. Знаем, что S и $S^{\perp}$ явл. лин. подпр-вами в $H \Rightarrow \forall$ α_1, α_2 - числа

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 (y_1 + z_1) + \alpha_2 (y_2 + z_2) = \underbrace{(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)}_{\in S} + \underbrace{(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2)}_{\in S^{\perp}}$$

и такое разложение единственно!

Поэтому $P(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 Px_1 + \alpha_2 Px_2$

(5) [Интегральный оператор:]

Каждой ф-ии $x(t) \in L_2[a, b]$ сопоставляет ф-ию из $L_2[a, b]$ по правилу $(Ax)(t) = \int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds$, где K - фикс. ф-ие двух переменных (например, непрерывная), которое наз. ядром оператора A.

Линейность (из лин. интеграла) очевидна

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)(t) = \int_a^b K(t, s)(\alpha_1 x_1(s) + \alpha_2 x_2(s))\, ds =$$

$$= \alpha_1 \int_a^b K(t, s)\, x_1(s)\, ds + \alpha_2 \int_a^b K(t, s)\, x_2(s)\, ds = \alpha_1 (Ax_1)(t) + \alpha_2 (Ax_2)(t)$$

Общие св-ва лин. операторов

Опр. Пусть $A: H \to H_1$ и $B: H \to H_1$ - лин. операторы

$\forall\, \alpha, \beta$ - числа зададим новое отображение $\alpha A + \beta B : H \to H_1$ ф-лой
$(\alpha A + \beta B) x \overset{\text{опр.}}{=} \alpha (Ax) + \beta (Bx)$

(1) $\forall\, \alpha, \beta$ - числа отобр-ие $\alpha A + \beta B$ явл. линейным

Док-во: $\forall\, s, t$ - числа и $\forall\, x, y \in H$ имеем

$(\alpha A + \beta B)(sx + ty) = \alpha A(sx + ty) + \beta B(sx + ty) = \alpha(sAx + tAy) +$

$+ \beta(sBx + tBy) = s(\alpha Ax + \beta Bx) + t(\alpha Ay + \beta By) = s(\alpha A + \beta B)x + t(\alpha A + \beta B)y$

Опр Пусть $A : H \to H_1$ и $B : H_1 \to H_2$ - лин. операторы. Зададим новое отобр-ие $BA : H \to H_2$ ф-лой $(BA)x = B(Ax)$ $\forall x \in H$. Оно наз. произведением (или суперпозицией) операторов A и B

(2) Отобр-ие $BA : H \to H_2$ явл. линейным

Док-во: $\forall\, x, y \in H$ и $\forall\, \alpha, \beta$ - числа имеем

$(BA)(\alpha x + \beta y) = B(A(\alpha x + \beta y)) = B(\alpha Ax + \beta Ay) = \alpha B(Ax) + \beta B(Ay) =$
$= \alpha (BA)x + \beta (BA) y$ ч.т.д.

7.2 Непрерывные и ограниченные операторы

В след. опр. H и H_1 - гильб. пр-ва, $A : H \to H_1$ - лин. оператор

Опр. Оператор A явл. непрерывным в т. $x_0 \in H$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $\forall x \in H$ такого, что $\|x - x_0\| < \delta$ справедливо нер-во $\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$

Замечание: это опр. повторяет опр. непр. в данной т. ф-ии $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ из матана

Другими словами: $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0 \Rightarrow Ax_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Ax_0$

или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = Ax_0$

или $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = A(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$

Опр: Оператор A наз. непрерывным, если он непрерывен в каждой точке H.

Опр. Множество $\{x \in H : \|x - x_0\| \le R\}$ наз. (замкнутым) шаром радиуса R с центром в т. $x_0 \in H$ Обозначение: $B(x_0, R)$

Опр. Множество $X \subset H$ наз. ограниченным, если оно содержится в некотором шаре конечного радиуса.

Эквивалентно

Множество $X \subset H$ наз. ограниченным, если оно содерж. в нек. шаре конечного радиуса с центром в нуле, т.е. если $\exists R < +\infty$ $\forall x \in X$ справедливо нер-во $\|x\| \le R$

Опр Говорят, что оператор $A : H \to H_1$ явл. ограниченным, если он переводит всякое ограниченное мн-во в ограниченное, т.е. если $\forall X \subset H$, которое явл. огр. мн-вом, мн-во $AX \subset H_1$ тоже явл. огр.

Теорема (о непрерывных и ограниченных операторах):

Пусть H и H_1 - гильб. пр-ва и $A : H \to H_1$ - лин. оператор. Тогда след. утв. эквивалентны

(1) $\exists x_0 \in H$: оператор A непрерывен в т. x_0

(2) A непрерывен (3) A ограничен (4) $\sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Ax\| < +\infty$

Док-во: (1) $\Rightarrow$ (2): Нам дано, что A непр. в т. x_0, т.е. что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$

Фиксируем $x_1 \in H$ и убедимся, что если $\forall \varepsilon > 0$ будем брать $\delta > 0$ из предыдущей ф-лы, то у нер-ва $\|y - x_1\| < \delta \Rightarrow \|Ay - Ax_1\| < \varepsilon$

Тем самым докажем, что A - непр. в т. x_1, а т.к. x_1 - произв. т., то A непрерывен и (2) будет доказана

$$\underset{\pm x_0}{\|y - x_1\|} = \|\underbrace{y - x_1 + x_0}_{\text{и обозн } x} - x_0\| = \|x - x_0\| < \delta$$

поскольку A непрерывен в т. x_0, то $\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$

$$\|Ax - Ax_0\| = \|A(y - x_1 + x_0) - Ax_0\| \overset{\text{лин. } A}{=} \|Ay - Ax_1 + \cancel{Ax_0} - \cancel{Ax_0}\| = \|Ay - Ax_1\|$$

(2) $\Rightarrow$ (3) Теперь дано, что A непрерывен. Значит, он непр. в каждой точке, в т.ч. и в т. $x_0 = 0$. Запишем это для $\varepsilon = 1$:

$\exists \delta > 0$: из $\|x - 0\| < \delta \Rightarrow \|Ax - 0\| < 1$ (*)

Пусть теперь $X \subset H$ - произв. огр. мн-во, т.е. $\exists R: \forall x \in X$ $\|x\| \le R$

И пусть $y \in AX$, т.е. $\exists x \in X: y = Ax$

можно вынести наружу лин. оператор A

Тогда $\|y\| = \|Ax\| = \|A(\frac{R}{\delta} \cdot \frac{\delta}{R} x)\| = \frac{R}{\delta} \|A(\frac{\delta}{R} x)\|$

При этом $\|\frac{\delta}{R} x\| = \frac{\delta}{R}\|x\| \le \frac{\delta}{R} R = \delta$

Значит, по св-ву (*) $\|A(\frac{\delta}{R} x)\| < 1 \Rightarrow \|y\| \le \frac{R}{\delta}$

$\Rightarrow$ мн-во AX содержится в шаре радиуса $\frac{R}{\delta}$ с центром в нуле, т.е. явл. огр. Поскольку огр. мн-во X было взято произвольным, то A - огр. оператор, т.е. (3) доказана

(3) $\Rightarrow$ (4) Дано, что A - огр. оператор, т.е. что он переводит всякое огр. мн-во в огр. мн-во.

Поскольку мн-во $\{x \in H : \|x\| \le 1\} = B(0,1)$ явл. огр., то и мн-во $\{Ax \mid \|x\| \le 1\} = A(B(0,1))$ явл. огр., т.е. содерж. в некотором шаре $B(0,R)$, т.е. $\forall x \in H: \|x\| \le 1$ $\|Ax\| \le R$

$\Rightarrow \sup\limits_{\|x\| \le 1} \|Ax\| \le R$, ч.т.д. (4)

(4) $\Rightarrow$ (1) Дано, что $\sup\limits_{\|x\| \le 1} \|Ax\| \overset{\text{обозн}}{=} R < +\infty$

Убедимся, что оператор A непр. в т. $x_0 = 0$. Фикс. произв. $\varepsilon > 0$.

Положим $\delta = \frac{\varepsilon}{R}$. Допустим, что $\|x\| < \delta$. Тогда при $x \ne 0$ имеем

$\|Ax\| = \|A(\|x\| \cdot \frac{x}{\|x\|})\| = \|x\| \, \|A(\frac{x}{\|x\|})\| \le$ $\|\frac{x}{\|x\|}\| = \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1$

(ε) $\delta \cdot R = \frac{\varepsilon}{R} \cdot R = \varepsilon$

При $x = 0$ имеем $\|Ax\| = \|A0\| = \|0\| = 0 < \varepsilon$

Значит, $\forall \varepsilon > 0$ мы указали $\delta = \frac{\varepsilon}{R} > 0$ такое, что $\forall x \in H: \|x\| = \|x - 0\| < \delta$ выполняется нер-во $\|Ax\| = \|Ax - A0\| < \varepsilon$. Значит, A непр. в т. $x_0 = 0$ => ч.т.д. (1)

Замечание: Если оператор разрывен в одной точке, то он разрывен всюду

7.3 Норма оператора

В предыдущем пункте мы доказали, что условие $\sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| < +\infty$ (*) экв. требованию непрерывности оператора A, и экв. требованию огр-ти A. Поэтому исследуем условие (*) подробнее.

Лемма: Пусть H и H_1 – гильб. пр-ва и $A: H \to H_1$ – лин. оператор. Тогда

$$\underbrace{\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|}_{=\alpha} = \underbrace{\sup_{\|x\| = 1} \|Ax\|}_{=\beta} = \underbrace{\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}_{=\gamma}$$

Док-во: $\alpha \geq \beta$ – очевидно (считаем по большему числу векторов => sup может только увеличиться)

$\beta \geq \gamma$ – $\forall x \neq 0$ имеем $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \left\| \frac{1}{\|x\|} Ax \right\| = \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \sup\limits_{\|y\| = 1} \|Ay\| = \beta$

=> $\sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \beta$ => $\gamma \leq \beta$

$\gamma \geq \alpha$ – $\forall x: \|x\| \leq 1$ имеем

$\begin{cases} \text{если } x \neq 0, \text{ то } \|Ax\| \leq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup\limits_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} = \gamma \\ \text{если } x = 0, \text{ то } Ax = 0 \text{ и } \|Ax\| = 0 \leq \gamma \end{cases}$

=> $\alpha = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq \gamma$ => $\alpha \leq \gamma$ – лемма доказана

Опр. Общее значение супремумов из предыдущей леммы наз. нормой оператора A. Обозначение: $\|A\|$

Теорема (о свойствах нормы лин. оператора):

Пусть A и B – лин. операторы и λ – число. Тогда

(1) $\|A\| \geq 0$, причем $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
(2) $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$
(3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
(4) $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ $\forall x$ – вектор
(5) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$
(6) $\big| \|A\| - \|B\| \big| \leq \|A - B\|$

Замечание: Св-ва (1)–(3) показывают, что норма оператора законно носит название нормы, поскольку удовлетворяет аксиомам нормы.

Док-во: (1) Неравенство $\|A\| \geq 0$ очевидно, т.к. $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \geq 0$

Импликация $A = 0$ => $\|A\| = 0$ очевидно, т.к. $\|0\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|0x\| = 0$

Докажем импликацию $\|A\| = 0$ => $A = 0$

Поскольку $\|A\| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0$, то $\forall x \neq 0$ $\|Ax\| = 0$, т.е. по свойствам нормы вектора $Ax = 0$.

Если же $x=0$, то $Ax=0$ в силу линейности оператора A.

Значит, $\forall x \quad Ax=0$. Но это и значит, что оператор A нулевой, т.е. $A=0$

(2) Докажем, что $\|\lambda A\| = |\lambda|\cdot\|A\|$. Фикс. вектор x такой, что $\|x\|\le 1$.

Тогда $\|\lambda Ax\| \overset{\text{св-во нормы векторов}}{=} |\lambda|\cdot\|Ax\| \le |\lambda| \sup\limits_{\|y\|\le 1}\|Ay\| = |\lambda|\cdot\|A\|$, т.е. $\|\lambda A\| \le |\lambda|\cdot\|A\|$

(чтобы вместе они дали равенство)

Докажем обратное. Если $\lambda\ne 0$, то $\|A\| = \|\frac{1}{\lambda}(\lambda A)\| \overset{\text{по уже доказанному (1)}}{\le} \frac{1}{|\lambda|}\|\lambda A\| \Rightarrow \|\lambda A\| \ge |\lambda|\cdot\|A\|$

при $\lambda=0$ тоже верно, будет $0=0$

(которое меньше sup тоже)

Окончательно: $\forall\lambda \quad \|\lambda A\| \ge |\lambda|\cdot\|A\| \ge \|\lambda A\|$ ч.т.д.

(3) Докажем, что $\|A+B\|\le\|A\|+\|B\|$. Фикс. x такой, что $\|x\|\le 1$. Тогда

$\|(A+B)x\| = \|Ax+Bx\| \overset{\text{св-во нормы векторов (положит. однородность)}}{\le} \|Ax\|+\|Bx\| \le \sup\limits_{\|y\|\le 1}\|Ay\| + \sup\limits_{\|y\|\le 1}\|By\| = \|A\|+\|B\|$

Значит, $\sup\limits_{\|x\|\le 1}\|(A+B)x\| \le \|A\|+\|B\|$

(4) Докажем, что $\forall x \quad \|Ax\|\le\|A\|\cdot\|x\|$. Если $x=0$, то очевидно, т.к. $0=0$.

Если $x\ne 0$, то $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \sup\limits_{y\ne 0}\frac{\|Ay\|}{\|y\|} = \|A\| \Rightarrow \|Ax\|\le\|A\|\cdot\|x\|$

(5) Докажем, что $\|AB\|\le\|A\|\cdot\|B\|$. Фикс. x такой, что $\|x\|\le 1$

$\|(AB)x\| = \|A(Bx)\| \overset{(4)}{\le} \|A\|\cdot\|Bx\| \overset{(4)}{\le} \|A\|\cdot\|B\|\cdot\|x\| \le \|A\|\cdot\|B\|$

$\Rightarrow \sup\limits_{\|x\|\le 1}\|(AB)x\| \le \|A\|\cdot\|B\|$

(6) Докажем, что $\big|\|A\|-\|B\|\big| \le \|A-B\|$. Это нер-во эк-но двум нер-вам:

$-\|A-B\| \le \|A\|-\|B\| \le \|A-B\|$

Докажем $\ulcorner$: $\|A\| = \|A-B+B\| \overset{(3)}{\le} \|A-B\|+\|B\| \Rightarrow \|A\|-\|B\|\le\|A-B\|$

Нер-во $\llcorner$ док-ся аналогично, либо заменяем A на B, а B на A и получим то же.

<u>Пример</u> (оценивание нормы конечномерного оператора):

Пусть $x_1,\dots,x_n$ – ОНБ в H; $y_1,\dots,y_n$ – ОНБ в H_1 и $A: H\to H_1$ – лин. оператор.
Оценим норму A.

Т.к. $x_1,\dots,x_n$ – базис в H, то $\forall x\in H \quad x=\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j x_j$. Кроме того,

$Ax = \sum\limits_{k=1}^{m}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}\lambda_j\right)y_k$, где a_{kj} – элементы матрицы оператора A в базисах

$x_1,\dots,x_n$ и $y_1,\dots,y_n$ (см. пример (3) из п. 7.1).

Тогда $\forall j=1,\dots,n \quad |\lambda_j| \le \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}|\lambda_j|^2} \overset{\text{рав-во Парсеваля}}{=} \|x\| = 1$

и $\|Ax\| = \|\sum\limits_{k=1}^{m}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}\lambda_j\right)y_k\| \le \sum\limits_{k=1}^{m}\left|\sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}\lambda_j\right|\cdot\underbrace{\|y_k\|}_{=1} \overset{\text{нер-во Δ для чисел}}{\le} \sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{kj}|\cdot\underbrace{|\lambda_j|}_{\le 1} \le$

$\le \sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{kj}| < +\infty$

Значит, $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1}\|Ax\| \le \sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{kj}| < +\infty$

Следствие Каждый конечномерный лин. оператор имеет конечную норму, а значит он и ограничен, и непрерывен.

7.4 Сходимость операторов и операторные ряды

Опр. Пусть H и H_1 – гильбертовы пр-ва и пусть $\forall n$ задан лин. оператор $A_n: H \to H_1$. Говорят, что послед-ть лин. операторов $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ сходится к лин. оператору $A: H \to H_1$, если $\|A_n - A\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Обозначение: $A_n \underset{n\to\infty}{\to} A$ или $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$

Св-ва сх-сти послед-тей операторов (Предполагается, что A, A_n, B, B_n действуют из H в H_1, причем $A_n \underset{n\to\infty}{\to} A$ и $B_n \underset{n\to\infty}{\to} B$)

(1) $\forall \alpha, \beta$ – числа $\alpha A_n + \beta B_n \underset{n\to\infty}{\to} \alpha A + \beta B$ (линейность)

Док-во: $\|(\alpha A_n + \beta B_n) - (\alpha A + \beta B)\| = \|\alpha(A_n - A) + \beta(B_n - B)\| \overset{(3)}{\leq} \|\alpha(A_n - A)\| + \|\beta(B_n - B)\| \overset{(2)}{=} |\alpha| \cdot \|A_n - A\| + |\beta| \cdot \|B_n - B\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$ ч.т.д.

(2) Если $\|A_n\| < +\infty$ $\forall n$, то $\|A\| < +\infty$, причем $\|A_n\| \to \|A\|$

Док-во: т.к. $A_n \underset{n\to\infty}{\to} A$, то $\|A_n - A\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Значит, $\exists n_0: \|A_{n_0} - A\| < 1$.

Тогда $\|A\| = \|A - A_{n_0} + A_{n_0}\| \overset{(3)}{\leq} \|A - A_{n_0}\| + \|A_{n_0}\| \leq 1 + \|A_{n_0}\| \Rightarrow$ оператор A имеет конечную норму

Осталось доказать, что $\|A_n\| \underset{n\to\infty}{\to} \|A\|$, т.е. что $\|A_n\| - \|A\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$, т.е. что $\big|\|A_n\| - \|A\|\big| \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Используем св-во (6) из п. 7.3:

$\big|\|A_n\| - \|A\|\big| \leq \|A_n - A\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$, т.к. $A_n \underset{n\to\infty}{\to} A$

Опр. (напоминание): Послед-ть операторов $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ наз. фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n(\varepsilon): \forall n \geq n(\varepsilon)$ $\forall p > 0$ выполняется нер-во: $\|A_n - A_{n+p}\| < \varepsilon$

Опр (напоминание): Нормированное пр-во наз. полным, если в нём всякая фунд. послед-ть явл. сходящейся.

Теорема (о полноте пр-ва операторов) (б/д):

Если H и H_1 – гильбертовы пр-ва, то пр-во огр. лин. операторов $A: H \to H_1$ с операторной нормой $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$ явл. полным.

Опр. Пусть H и H_1 – гильб. пр-ва и пусть $\forall n$ задан лин. оператор $A_n: H \to H_1$. Операторным рядом наз. формальное выражение $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ (*).

При этом выражение $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} A_n$ наз. частичной суммой операторного ряда (*). Говорят, что ряд (*) сх-ся, если послед-ть его частич. сумм явл-ся сх-ся. При этом $\lim\limits_{N\to\infty} S_N$ наз. суммой ряда (*) и обозн. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, т.е. полагают $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \lim\limits_{N\to\infty} S_N = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} A_n$

Замечание Ряд и сумма ряда обозн. одинаковым символом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ – всё как в матане.

Св-ва сх-се операторных рядов:

(1) (линейность) Если $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ и $B = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$, то $\forall \alpha, \beta$ - числа ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha A_n + \beta B_n)$ сх-се и имеет место равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha A_n + \beta B_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} A_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} B_n$$

Док-во: $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha A_n + \beta B_n) = \lim\limits_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (\alpha A_n + \beta B_n) = \lim\limits_{N\to\infty} \left[\alpha \sum_{n=1}^{N} A_n + \beta \sum_{n=1}^{N} B_n\right] \overset{\text{линейность предела послед-ти}}{=}$

$= \alpha \lim\limits_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} A_n + \beta \lim\limits_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} B_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} A_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} B_n$ ч.т.д.

(2) Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n\|$ сх-се, то операторный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ тоже сх-се, причем $\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n\| \le \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n\|$

Док-во: Убедимся, что послед-ть $S_N = \sum_{n=1}^{N} A_n$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ явл. фунд., т.е. что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon): \forall m \ge n(\varepsilon) \ \forall p > 0 \ \|S_m - S_{m+p}\| < \varepsilon$.

В самом деле, $\|S_m - S_{m+p}\| = \|\sum_{n=1}^{m} A_n - \sum_{n=1}^{m+p} A_n\| = \|-\sum_{n=m+1}^{m+p} A_n\| \le \sum_{n=m+1}^{m+p} \|A_n\|$ (*)

Однако, числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n\|$ сх-се $\Rightarrow$ по критерию Коши сх-ти числовых рядов имеем $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon): \forall m \ge n(\varepsilon) \ \forall p > 0 \ \sum_{n=m+1}^{m+p} \|A_n\| < \varepsilon$

С учетом (*) это означает, что $S_1, S_2, \dots, S_N, \dots$ - фундаментальна. Ввиду полноты пр-ва огр. операторов она сх-се и предел по опр. мы наз. этот предел суммой ряда $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$. При этом

$\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n\| = \|\lim\limits_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} A_n\| \overset{\text{св-во (2) из п.7.4}}{=} \lim\limits_{N\to\infty} \|\sum_{n=1}^{N} A_n\| \overset{\text{нер-во }\Delta\text{ (много раз)}}{\le} \lim\limits_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \|A_n\| \overset{\text{опр. суммы числового ряда}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n\|$ ч.т.д.

7.5 Обратимость оператора. Обратный оператор.

Опр Оператор $A: H \to H_1$ наз. обратимым, если ур-ие $Ax = y$ имеет не более одного решения $x \in H$ при любом $y \in H_1$.

Опр Образом оператора $A: H \to H_1$ наз. мн-во $AH = \{y \in H_1 \mid \exists x \in H: Ax = y\}$
Обозн.: $\operatorname{im} A$ (от image)

Лемма: $\operatorname{im} A$ явл. подпр-вом пр-ва H_1

Док-во: Докажем, что $\forall y_1, y_2 \in \operatorname{im} A$ и $\forall$ чисел α, β вектор $\alpha y_1 + \beta y_2$ тоже лежит в $\operatorname{im} A$.

Пусть $j = 1, 2$. Тогда $y_j \in \operatorname{im} A \Rightarrow \exists x_j \in H: y_j = Ax_j$. Поскольку H - лин. пр-во, то $\alpha x_1 + \beta x_2 \in H$. Поскольку A - лин. оператор, то $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2 = \alpha y_1 + \beta y_2 \Rightarrow$ для вектора $\alpha y_1 + \beta y_2$ найдется вектор $\alpha x_1 + \beta x_2 \in H$ такой, что вып-се рав-во $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha y_1 + \beta y_2$.
Значит, $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \operatorname{im} A$, т.е. $\operatorname{im} A$ - лин. подпр-во ч.т.д.

Опр Пусть оператор $A: H \to H_1$ обратим. Тогда в подпр-ве $\operatorname{im} A$ можно задать отображение по след. правилу: каждому $y \in \operatorname{im} A$ сопоставим тот единственный вектор $x \in H$, для которого $Ax = y$. Это отобр-ие наз. оператором обратным к A, и обозн. A^{-1}.

Другими словами, если A обратим и $y \in \operatorname{im} A$, то ф-лы $Ax = y$ и $x = A^{-1} y$ эквивалентны.

Замечание A^{-1} определен не во всём пр-ве H_1, а только на его подпр-ве $\operatorname{im} A$. Чтобы соблюсти симметрию (или равноправие) между A и A^{-1}, можно с самого начала рассматривать операторы $A: H \to H_1$, опр. не во всем H, а только на нек. подпр-ве пр-ва H (область определения A, обозн. $\operatorname{dom} A$)

Св-ва обратного оператора.

(1) $\operatorname{dom} A^{-1} = \operatorname{im} A$

(2) Если $A: H \to H_1$ лин. и обратим, то A^{-1} линеен.

Док-во: Пусть $y_1, y_2 \in \operatorname{dom} A^{-1} = \operatorname{im} A$. Докажем, что $\forall \alpha, \beta$

$A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha A^{-1} y_1 + \beta A^{-1} y_2$

$\forall j = 1, 2 \ \exists x_j \in H: Ax_j = y_j$ (или $x_j = A^{-1} y_j$). Т.к. A - линеен, то

$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2 = \alpha y_1 + \beta y_2 \Leftrightarrow \underbrace{\alpha x_1}_{\alpha A^{-1} y_1} + \underbrace{\beta x_2}_{\beta A^{-1} y_2} = A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2)$ ч.т.д.

(3) Пусть $A: H \to H_1$ и $B: H_1 \to H_2$ - лин. обратимые операторы. Тогда лин. оператор $BA: H \to H_2$ обратим, причем $(BA)^{-1} = A^{-1} B^{-1}$

Док-во: Линейность BA доказана в п. 7.1.

Обратимость: проверим, что ур-ие $(BA)x = z$ (*) имеет не более одного решения $x \in H$ для $\forall z \in H_2$

Перепишем (*) в виде $B(Ax) = z$. Т.к. B обратим, то ур-ие $By = z$ имеет не более одного реш. y, причем это решение м.б. записано в виде $y = B^{-1} z$ $\Rightarrow Ax = B^{-1} z$. Но A тоже обратим $\Rightarrow$ не более одного реш. x и

$x = A^{-1}(B^{-1} z) = (A^{-1} B^{-1}) z$ (**)

Тем самым, мы доказали, что (*) имеет не более одного решения $\Rightarrow BA$ обратим и это реш. м.б. записано как $x = (BA)^{-1} z$

Сравниваем с (**), заключаем, что $(BA)^{-1} = A^{-1} B^{-1}$ ч.т.д.

(4) Пусть $A: H \to H_1$ и $B: H_1 \to H$ лин. операторы и $I_H: H \to H$, $I_{H_1}: H_1 \to H_1$ - тождественные операторы в H и H_1 соотв. Пусть $AB = I_{H_1}$ и $BA = I_H$. Тогда A обратим и $A^{-1} = B$.

Док-во: От противного. Допустим, что A не обратим. Тогда $\exists y \in H_1$ и $\exists x_1, x_2 \in H$ такие, что $x_1 \neq x_2$ и $Ax_1 = y = Ax_2$. Тогда $\underbrace{B(Ax_1)}_{I_H x_1 = x_1} = By = \underbrace{B(Ax_2)}_{I_H x_2 = x_2}$

но это противоречит тому, что $x_1 \neq x_2$: значит, A обратим.

Теперь воспользуемся рав-вом $AB = I_{H_1}$. Из него следует, что $\forall y \in H_1$ $A(By) = y$. Т.к. A обратим, то оно экв. рав-ву $By = A^{-1} y$, справедливому $\forall y \in H_1$. Значит, $B = A^{-1}$ ч.т.д.

7.6 Теорема Неймана

(ф-ла для суммы геом. прогрессии)

Теорема (Неймана): Пусть H - лин.об. пр-во, $A: H \to H$ - лин. огр. оператор, причем $\|A\| < 1$, $\operatorname{dom} A = H$. Тогда $I - A$ обратим, $(I-A)^{-1}$ огр. и $\operatorname{dom}(I-A)^{-1} = H$, причем $(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$, где $A^0 = I$, $A^{n+1} = A \cdot A^n$ $\forall n \geq 0$

Док-во: $\|A^n\| = \|A \cdot A^{n-1}\| \le \|A\| \cdot \|A^{n-1}\| \le \ldots \le \|A\|^n \cdot \underbrace{\|A^0\|}_{\|I\|=1} = \|A\|^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (по усл.)

Значит, а) $A^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, т.к. $\|A^n\| \le \|A\|^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

б) ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$ сх-ся, т.к. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|A^n\| \overset{(2) \text{ из } 7.4 (3)}{\le} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \|A\|^n \overset{\text{геом. пр}}{=} \dfrac{1}{1-\|A\|} < +\infty$, т.к. $\|A\| < 1$

$$\Rightarrow (I-A)\left(\sum_{n=0}^{N} A^n\right) = \sum_{n=0}^{N} A^n - \sum_{n=0}^{N} A^{n+1} = I - A^{N+1}$$

$$\downarrow_{N\to\infty}^{(б)} \qquad\qquad \downarrow_{N\to\infty}^{(а)}$$

$$(I-A)\left(\sum_{n=0}^{\infty} A^n\right) \qquad\qquad I$$

$$\Rightarrow (I-A)\left(\sum_{n=0}^{\infty} A^n\right) = I$$

Аналогично можем доказать $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n\right)(I-A) = I$. Значит, по св-ву (4) обратного оператора (п. 7.5) I - обратим, и его обратным явл. оператор $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$, т.е.

$$(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

Оператор $(I-A)^{-1}$ ограничен, т.к. ограничен оператор $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$:

$\left\|\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n\right\| \le \sum\limits_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \dfrac{1}{1-\|A\|}$ и $\operatorname{dom}(I-A)^{-1} = \operatorname{dom}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n\right) = H$ ч.т.д.

7.7 Спектр оператора

Пусть $A: H \to H$ - лин. оператор. Фиксируем $\lambda \in \mathbb{C}$ и $y \in H$. Рассмотрим ур-ие $Ax - \lambda x = y$, т.е. $(A - \lambda I)x = y$

Выделим 4 случая, которые могут встретиться при решении этого ур-ия

(1) Оператор $A - \lambda I$ не обратим, т.е. $\exists\, y \in H$ и $\exists\, x_1, x_2 \in H$ такие, что $x_1 \ne x_2$ и $Ax_1 - \lambda x_1 = y = Ax_2 - \lambda x_2$. В этом случае $\exists\, x \in H: x \ne 0$ и $Ax - \lambda x = 0$

[Достаточно взять $x = x_1 - x_2$]

Опр. Если $(A - \lambda I)$ не обратим (т.е. если $\exists\, x \ne 0: Ax = \lambda x$), то λ наз. собственным значением оператора A, а вектор $x \ne 0$ такой, что $Ax = \lambda x$, наз. собственным вектором оператора A, соотв. сз λ. Совокупность всех сз оператора A наз. точечным спектром оператора A и обозн. $\sigma_p(A)$ [point]

(2) Оператор $(A - \lambda I)$ обратим, причем $\operatorname{dom}(A - \lambda I)^{-1} = H$

Опр. В этом случае говорят, что λ явл. регулярным значением оператора A. Мн-во всех регулярных значений A наз. резольвентным множеством оператора A и обозначают $\rho(A)$. Оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ наз. резольвентным оператором оператора A и обозн. R_λ, т.е. $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$.

R_λ разрешает (resolve) ур-ие $(A - \lambda I)x = y \Leftrightarrow x = (A - \lambda I)^{-1} y = R_\lambda y$

R_λ автоматически явл. ограниченным (след. теорема)

Теорема (Банаха об обратном операторе) (б/д):

Если H, H_1 - гильбертовы пр-ва и $B: H \to H_1$ - лин. огр. обратимый оператор, причем $\operatorname{dom} B^{-1} = H_1$, то оператор B^{-1} ограничен.

(3) Оператор $(A - \lambda I)$ обратим, причем $\operatorname{dom}(A - \lambda I)^{-1} \ne H$, но $\overset{\text{closure - замыкание}}{cl}\left[\operatorname{dom}(A - \lambda I)^{-1}\right] = H$

Опр. В этом случае говорят, что λ принадлежит непрерывному спектру A, $\lambda \in \overset{\text{continuous}}{\sigma_c}(A)$

(4) Оператор $(A-\lambda I)$ обратим, но $\mathrm{dom}\,(A-\lambda I)^{-1}$ не плотно в H_1 (т.е. $\mathrm{cl}[\mathrm{dom}(A-\lambda I)^{-1}] \neq H_1$)

Опр. В этом случае говорят, что λ принадлежит остаточному спектру оператора A и пишут $\lambda \in \sigma_r(A)$ [r от residual]

Опр. Спектром $\sigma(A)$ оператора A наз. дополнение резольвентного мн-ва $\rho(A)$ до $\mathbb{C}$, т.е. $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$

Простейшие св-ва спектра:

(1) $\sigma = \sigma_p \cup \sigma_c \cup \sigma_r$; $\sigma_p \cap \sigma_c = \sigma_c \cap \sigma_r = \sigma_r \cap \sigma_p = \varnothing$

Док-во: непосредственно следует из определения

(2) Спектр оператора A содержится в замкнутом круге радиуса $\|A\|$ с центром в 0, т.е.

$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|A\|\}$

Док-во: Это утв. экв. тому, что всякое $\lambda \in \mathbb{C}$ такое, что $|\lambda| > \|A\|$ обязательно явл. регулярным значением, т.е. $\lambda \in \rho(A)$. Последнее следует из вычисления:

$$(A-\lambda I)^{-1} = [-\lambda(I - \tfrac{1}{\lambda}A)]^{-1} = [\underbrace{(-\lambda I)}_{\substack{\text{обратим и} \\ \mathrm{dom}(\,)^{-1} = H}} \underbrace{(I - \tfrac{1}{\lambda}A)}_{\substack{\text{обратим и} \\ \mathrm{dom}(\,)^{-1} = H}}] = (I - \tfrac{1}{\lambda}A)^{-1}(-\tfrac{1}{\lambda}I)$$

($\lambda \neq 0$) по т. Неймана, т.к. $\|\frac{1}{\lambda}A\| = \frac{\|A\|}{|\lambda|} < 1$

$\wedge$ св-во (3) обр. оператора из 7.5 — $\exists$ и определен во всем H ч.т.д.

(3) Спектр оператора A явл. замкнутым мн-вом на комплексной плоскости

Док-во: Это утв. экв. тому, что $\rho(A)$ явл. открытым мн-вом, т.е. что $\forall \lambda_0 \in \rho(A)\ \exists \varepsilon > 0: \forall \lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ имеем $\lambda \in \rho(A)$.

Фиксируем $\lambda_0 \in \rho(A)$. Тогда $(A - \lambda I \overset{+\lambda_0 I}{})^{-1} = [(A-\lambda_0 I) - (\lambda - \lambda_0)I]^{-1} =$

$$= \{\underbrace{(A-\lambda_0 I)}_{\substack{\text{обратим и} \\ \mathrm{dom}(\,)^{-1} = H,\ \text{т.к.} \\ \lambda_0 \in \rho(A)}} \underbrace{[I - (\lambda-\lambda_0)(A-\lambda_0 I)^{-1}]}_{\text{обратим и } \mathrm{dom}[\,]^{-1} = H}\}^{-1}$$

в силу т. Неймана, т.к. $\|(\lambda-\lambda_0)(A-\lambda_0 I)^{-1}\| = |\lambda - \lambda_0| \cdot \|(A-\lambda_0 I)^{-1}\| < 1$ как только мы положим $0 < \varepsilon = \frac{1}{\|(A-\lambda_0 I)^{-1}\|} < +\infty$ по т. Банаха и $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$

Значит, положив $\varepsilon = \frac{1}{\|(A-\lambda_0 I)^{-1}\|}$, мы увидим, что $\forall \lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ обратим и обратный определен во всем пр-ве, т.е. все такие λ явл. регулярными значениями, т.е. $\lambda \in \rho(A)$ ч.т.д.

7.8 Линейные функционалы

Опр. Линейным функционалом наз. лин. оператор, действующий из гильб. пр-ва H во мн-во чисел (т.е. в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$)

В этом пункте H всегда обозначает произвольное гильбертово пр-во.

Пример (лин. ф-ла): Фикс. произв. $x_0 \in H$, тогда формула $f(x) = (x, x_0)$, где $x \in H$, а справа скал. пр-ие, задает лин. ф-л $f: H \to \mathbb{C}$

Опр. Множество $\{x \in H \mid f(x) = 0\}$ наз. ядром ф-ла f и обозн. $\ker f$.

Св-ва ядра лин. ф-лов:

(1) Для любого лин. ф-ла $f: H \to \mathbb{C}$ его ядро явл. подпр-вом в H.

Док-во: Убедимся, что $\forall x, y \in \ker f$ и $\forall \alpha, \beta$ - числа вектор $\alpha x + \beta y$ лежит в $\ker f$. Это очевидно ввиду линейности ф-ла f:

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \alpha x + \beta y \in \ker f$$ ч.т.д.

(2) Если $f: H \to \mathbb{C}$ - непр. лин. ф-л, то $\ker f$ явл. замкнутым мн-вом в H.

Док-во: Нужно доказать, что если $\forall n$ $x_n \in \ker f$ и $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \in H$, то $x_0 \in \ker f$. Это очевидно ввиду непрерывности f:

$$f(x_0) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \Rightarrow x_0 \in \ker f$$ ч.т.д.

(верно и обратное к (2))

(3) Если $f: H \to \mathbb{C}$ - ненулевой непр. лин. ф-л, то

$$\underbrace{\dim (\ker f)^{\perp}}_{\text{размерность ортог. доп.}} \overset{\text{опр}}{=} \underbrace{\operatorname{co}\dim(\ker f)}_{\text{коразмерность ядра}} = 1$$

Док-во: f - непрерывен $\Rightarrow$ $\ker f$ замкнуто $\Rightarrow H = (\ker f) \oplus (\ker f)^{\perp}$

f - ненулевой $\Rightarrow \ker f \neq H \Rightarrow (\ker f)^{\perp} \neq \{0\}$

Фикс. $x_0 \in (\ker f)^{\perp}$ такой, что $x_0 \neq 0$ и убедимся, что x_0 образует базис в $(\ker f)^{\perp}$, т.е. что $\forall x_1 \in (\ker f)^{\perp}$ найдется α - число такое, что $x_1 = \alpha x_0$

Для этого положим $\alpha = \frac{f(x_1)}{f(x_0)}$ и $y = \alpha x_0 - x_1$. Тогда, с одной стороны,

$y \in (\ker f)^{\perp}$ (т.к. $x_0, x_1 \in (\ker f)^{\perp}$ и $(\ker f)^{\perp}$ явл. подпр-вом в H).

С другой стороны, $y \in \ker f$ (т.к. $f(y) = f(\alpha x_0 - x_1) = \alpha f(x_0) - f(x_1) = \frac{f(x_1)}{f(x_0)} f(x_0) - f(x_1) = 0$). Но H явл. прямой суммой подпр-в $\ker f$ и $(\ker f)^{\perp}$, а значит, есть только один вектор, который лежит сразу в обоих подпр-вах (нулевой).

Итак, $y = \alpha x_0 - x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \alpha x_0 \Rightarrow x_0$ образует базис в $(\ker f)^{\perp} \Rightarrow$ $\dim(\ker f)^{\perp} = 1$ ч.т.д.

7.9 Сопряжённое пространство. Теорема Рисса об общем виде лин. непр. ф-ла

Опр: Мн-во всех непр. лин. ф-лов, определенных на гильб. пр-ве H, наз. сопряженным к H пр-вом и обозн. через H^*

Замечание: Из п. 7.1 мы знаем, что H^* явл. лин. пр-вом

Теорема (об общем виде лин. непр. ф-ла):

Пусть H - гильб. пр-во. Тогда имеют место след. утверждения:

(1) $\forall f \in H^*$ $\exists! \ x_0 \in H: f(x) = (x, x_0)$ $\forall x \in H$; при этом $\|f\| = \|x_0\|$

(2) $\forall x_0 \in H$ формула $f(x) = (x, x_0)$ задаёт лин. непр. ф-л на H (т.е. $f \in H^*$); при этом $\|f\| = \|x_0\|$

Док-во: (2) Линейность ф-ла $f(x) = (x, x_0)$ очевидна ввиду линейности скал. пр-ка по первому аргументу

Оценим норму ф-ла f:

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{\|x\|=1} |(x, x_0)| \overset{\text{нер-во Коши-Буняковского}}{\leq} \sup_{\|x\|=1} \|x\| \cdot \|x_0\| = \|x_0\| < +\infty \Rightarrow f \text{ непрерывен.}$$

Чтобы найти $\|f\|$, оценим её снизу. При этом расм. два случая:

$x_0 = 0$: $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |\underbrace{(x, x_0)}_{=0}| = \sup_{\|x\|=1} 0 = 0 = \|x_0\|$

норма $=1$, т.е. один из векторов x

$x_0 \neq 0$: $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |(x, x_0)| \geq \left|\left(\frac{x_0}{\|x_0\|}, x_0\right)\right| = \frac{1}{\|x_0\|} \overbrace{(x_0, x_0)}^{=\|x_0\|^2} = \|x_0\|$

Значит, $\|x_0\| \leq \|f\| \underset{\text{из оценки КБ}}{\leq} \|x_0\|$, т.е. $\|f\| = \|x_0\|$ и утв. (2) доказано

Теперь докажем (1). Докажем, что сущ. $x_0 \in H$ такой, что $f(x) = (x, x_0)$ $\forall x \in H$

Если $f = 0$, то положим $x_0 = 0$. Тогда $\forall x \in H$ $f(x) = 0 = (x, 0) = (x, x_0)$

Если $f \neq 0$, то $\ker f$ явл. замкнутым подпр-вом в H, $H = (\ker f) \oplus (\ker f)^{\perp}$ и $\dim (\ker f)^{\perp} = 1$ (св-во (3) ядра ф-ла)

Это значит, что $\forall x \in H$ $\exists!\, x_1 \in \ker f$ и $\exists!\, x_2 \in (\ker f)^{\perp}$: $x = x_1 + x_2$, а также что $\exists x_3 \in (\ker f)^{\perp}: \|x_3\| = 1$ и $\forall x_2 \in (\ker f)^{\perp}$ $\exists \alpha \in \mathbb{C}: x_2 = \alpha x_3$ (т.е. в $(\ker f)^{\perp}$ есть базис, состоящий из одного вектора x_3)

Другими словами, любой вектор $x \in H$ можно представить в виде $x = x_1 + \alpha x_3$, где x_3 - нек. вектор, не зависящий от x.

Тогда $f(x) = f(x_1 + \alpha x_3) = \underbrace{f(x_1)}_{=0, \text{ т.к. } x_1 \in \ker f} + \alpha f(x_3) = f(x_3) \underbrace{(x_1, x_3)}_{=0} + \alpha f(x_3) \underbrace{(x_3, x_3)}_{=1} =$

$= (x_1, \overline{f(x_3)}\, x_3) + (\alpha x_3, \overline{f(x_3)}\, x_3) = (\overbrace{x_1 + \alpha x_3}, \overline{f(x_3)}\, x_3) = (x, x_0)$, где

$x_0 \overset{\text{опр}}{=} \overline{f(x_3)}\, x_3 \Rightarrow$ существование вектора x_0 доказано

Единственность x_0 - от противного. Пусть $\exists\, \hat{x}_0 \neq x_0$ такие, что $\forall x \in H$ $(x, x_0) = f(x) = (x, \hat{x}_0) \Rightarrow (x, x_0 - \hat{x}_0) = 0$ $\forall x \in H$

Подставим $x = x_0 - \hat{x}_0$. Получим $(x_0 - \hat{x}_0, x_0 - \hat{x}_0) = \|x_0 - \hat{x}_0\|^2 = 0 \Rightarrow x_0 - \hat{x}_0 = 0 \Rightarrow x_0 = \hat{x}_0$ $\Rightarrow x_0$ - единственный

Равенство $\|f\| = \|x_0\|$ было доказано в док-ве п. (1)

<u>Замечание</u> Т. Рисса показывает, что между вектором $x_0 \in H$ и ф-лом $f \in H^*$, осуществляемое ф-лой $f(x) = (x, x_0)$ $\forall x \in H$ (*) явл. изоморфизмом, т.е. что H и H^* получаются друг из друга переобозначением

7.10 Бра- и кет- векторы

Бра- и кет- векторы - это формализм, в рамках которого скал. пр-ие линейно по второму аргументу (а не по первому)

$(x, y) = \langle y | x \rangle$, где (x, y) - привычное скал. пр-ие, x - аргумент, по которому линейно скал. пр-ие

$\langle y | x \rangle$ мысленно разбивают на $\langle y |$ и $| x \rangle$, т.е.

$(x, y) = \langle y | x \rangle = \{\langle y |\}\{| x \rangle\}$

Опр. Символ $|x\rangle$ наз. кет-вектором и отождествляют с вектором x исходного гильб. пр-ва H.

Опр. Символ $\langle y|$ наз. бра-вектором и отождествляют с лин. непр. ф-лом на H, т.е. с вектором пр-ва H^*.

bra c ket = скобка

Пример 1: Разложение тождественного оператора или правило сокращение.

Пусть H – гильб. пр-во, $\dim H = n$, $x_1, \dots, x_n$ – ОНБ в H. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k\rangle\langle x_k| = I \text{ – тождественный оператор}$$

Решение будем записывать в привычных и в бра-кет обозначениях

$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$, где $\alpha_k = (x, x_k)$ – коэф. Фурье	$|x\rangle = \sum_{k=1}^{n} |x_k\rangle \alpha_k$, где $\alpha_k = \langle x_k | x\rangle$
$\Rightarrow x = \sum_{k=1}^{n} (x, x_k) x_k$	$|x\rangle = \sum_{k=1}^{n} |x_k\rangle\langle x_k | x\rangle = \left\{\sum_{k=1}^{n} |x_k\rangle\langle x_k|\right\} |x_k\rangle$
$x = I x$	$\Rightarrow I = \sum_{k=1}^{n} |x_k\rangle\langle x_k|$

Замечание: Ф-лой сокращение её называют потому, что в физике знак суммирования опускают $\sum_{k=1}^{n} |x_k\rangle\langle x_k| = |x_k\rangle\langle x_k| = I$ – „сокращаем" это выражение

Пример 2: Нахождение резольвентного оператора

Пусть H – гильб. пр-во, $\dim H = n$, $x_1, \dots, x_n$ – СВ оператора A, отв. $\lambda_1, \dots \lambda_n$ (т.е. $\forall k$ $Ax_k = \lambda_k x_k$), причем $x_1, \dots x_n$ – ОНБ в H. Тогда

$$(A - \lambda I)^{-1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{|x_j\rangle\langle x_j|}{\lambda_j - \lambda}$$

Нужно $\forall y \in H$ найти $x \in H$, являющийся решением ур-ие $(A - \lambda I)x = y$, т.е. $x = (A - \lambda I)^{-1} y$

$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$, где $\alpha_j = (x, x_j)$	$|x\rangle = \sum_{j=1}^{n} |x_j\rangle \alpha_j$, где $\alpha_j = \langle x_j | x\rangle$
$y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j$, где $\beta_j = (y, x_j)$	$|y\rangle = \sum_{j=1}^{n} |x_j\rangle \beta_j$, где $\beta_j = \langle x_j | y\rangle$
$Ax_j = \lambda_j x_j$	$|x_j\rangle A = |x_j\rangle \lambda_j$
$Ax - \lambda x = y$	$|x\rangle A - |x\rangle \lambda = |y\rangle$
$A\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\right) - \lambda\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j$	$\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j\rangle \alpha_j\right) A - \sum_{j=1}^{n} |x_j\rangle \alpha_j \lambda = \sum_{j=1}^{n} |x_j\rangle \beta_j$
$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j x_j - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda x_j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j$	$\sum_{j=1}^{n} |x_j\rangle \alpha_j \lambda_j - \sum_{j=1}^{n} |x_j\rangle \alpha_j \lambda = \sum_{j=1}^{n} |x_j\rangle \beta_j$
$\alpha_j \lambda_j - \alpha_j \lambda = \beta_j$	$\alpha_j \lambda_j - \alpha_j \lambda = \beta_j$
$\alpha_j = \frac{\beta_j}{\lambda_j - \lambda}$ $\forall j$ $\forall j$	$\alpha_j = \frac{\beta_j}{\lambda_j - \lambda}$ $\forall j$
$x = \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j}{\lambda_j - \lambda} x_j$	$|x\rangle = \sum_{j=1}^{n} |x_j\rangle \frac{\beta_j}{\lambda_j - \lambda}$

$x = \sum_{j=1}^{n} \frac{(y, x_j)}{\lambda_j - \lambda} x_j$

$|x\rangle = \sum_{j=1}^{n} |x_j\rangle \frac{\langle x_j|y\rangle}{\lambda_j - \lambda}$

$|x\rangle = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{|x_j\rangle\langle x_j|}{\lambda_j - \lambda} \right\} |y\rangle$

Значит, $(A - \lambda I)^{-1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{|x_j\rangle\langle x_j|}{\lambda_j - \lambda}$

7.11 Оператор, сопряжённый к ограниченному

Опр Пусть H и H_1 – гильб. пр-ва и $A: H \to H_1$ – лин. огр. оператор. Фиксируем $x_0 \in H_1$ и построим лин. ф-л $f: H \to \mathbb{C}$ по формуле

$f(x) = (Ax, x_0) \quad \forall x \in H$

Этот ф-л линеен всилу линейности оператора A и линейности скал. пр-ия по первому аргументу. След. вычисление показывает, что он еще и непрерывен

$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{|(Ax, x_0)|}{\|x\|} \overset{\text{нер-во К-Б}}{\leq} \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\| \cdot \|x_0\|}{\|x\|} = \|A\| \cdot \|x_0\| < +\infty$

По т. Рисса $\exists!\ x_1 \in H$: $f(x) = (x, x_1)$ для всех $x \in H$

Тем самым, возникло правило (отображение) $H_1 \to H$, которое каждому $x_0 \in H_1$ сопоставляет $x_1 \in H$. Будем писать $x_1 = A^* x_0$ и называть A^* оператором, сопряжённым к A.

Замечание: Если опустить рассуждение то A^* – это оператор, задаваемый равенством $(Ax, x_0) = f(x) = (x, A^* x_0)$

Мини-лемма: Если H – гильб. пр-во и векторы $x, y \in H$ таковы, что $\forall z \in H$ выполняется равенство $(x, z) = (y, z)$, то $x = y$

Док-во: $(x, z) = (y, z) \Leftrightarrow (x - y, z) = 0$ – т.к. рав-во верно $\forall z \in H$, то можем подставить сюда $z = x - y$

$(x - y, x - y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\|^2 = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$ ч.т.д.

Замечание: Мини-лемма позволяет устанавливать рав-во векторов „бескоординатным способом".

Пусть H и H_1 – гильб. пр-ва, $A, B: H \to H_1$ – огр. операторы, α и β – числа

Св-ва оператора, сопряженного к ограниченному

(1) A^* явл. линейным огр. оператором, причем $\|A^*\| \leq \|A\|$

Док-во: Пусть $x \in H$; $y_1, y_2 \in H_1$ – произв. векторы. Тогда

$(x, A^*(\alpha y_1 + \beta y_2)) \overset{\text{опр}}{=} (Ax, \alpha y_1 + \beta y_2) = \bar{\alpha}(Ax, y_1) + \bar{\beta}(Ax, y_2) \overset{\text{опр}}{=} \bar{\alpha}(x, A^* y_1) + \bar{\beta}(x, A^* y_2) = (x, \alpha A^* y_1) + (x, \beta A^* y_2) = (x, \alpha A^* y_1 + \beta A^* y_2)$

т.к. справедливо $\forall x \in H$, то $A^*(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha A y_1 + \beta A^* y_2$

т.к. выполняется $\forall y_1, y_2 \in H_1$ и $\forall$ чисел α, β, то A^* – лин. оператор

Оценим норму оператора A^*:

$|(x, A^* y)| \overset{\text{опр}}{=} |(Ax, y)| \overset{\text{К-Б}}{\leq} \|Ax\| \|y\| \overset{\text{св-во нормы оператора}}{\leq} \|A\| \|x\| \|y\|$ Подставив сюда $x = A^* y$, получим

$\|A^*y\|^2 = (Ay, A^*y) \le \|A\| \cdot \|A^*y\| \cdot \|y\| \Rightarrow \|A^*y\| \le \|A\| \|y\|$

Значит, $\|A^*\| \overset{\text{опр}}{=} \sup\limits_{y\neq 0} \frac{\|A^*y\|}{\|y\|} \le \sup\limits_{y\neq 0} \frac{\|A\|\cancel{\|y\|}}{\cancel{\|y\|}} = \|A\|$ ч.т.д.

(2) $(\alpha A + \beta B)^* = \bar\alpha A^* + \bar\beta B^*$

Док-во: Пусть $x \in H$ и $y \in H_1$ – произвольные векторы. Тогда

$(x, (\alpha A + \beta B)^* y) \overset{\text{опр}}{=} ((\alpha A + \beta B)x, y) = (\alpha Ax + \beta Bx, y) = \alpha(Ax, y) + \beta(Bx, y) \overset{\text{опр}}{=}$

$= \alpha(x, A^*y) + \beta(x, B^*y) = (x, \bar\alpha A^*y + \bar\beta B^*y) = (x, (\bar\alpha A^* + \bar\beta B^*)y)$

т.к. справедливо $\forall x \in H_1$ то по мини-лемме

$(\alpha A + \beta B)^* y = (\bar\alpha A^* + \bar\beta B^*)y \quad \forall y \in H$

Значит, $(\alpha A + \beta B)^* = \bar\alpha A^* + \bar\beta B^*$ ч.т.д.

(3) $(A^*)^* = A$

Док-во: $A: H \to H_1$; $A^*: H_1 \to H$; $(A^*)^*: H \to H_1$

Тогда $\forall x \in H_1$ и $\forall y \in H$ имеем

$(x, (A^*)^* y) \overset{\text{опр}}{=} (A^*x, y) = \overline{(y, A^*x)} \overset{\text{опр}}{=} \overline{(Ay, x)} = (x, Ay)$

По мини-лемме $(A^*)^* y = Ay \quad \forall y \in H \Rightarrow (A^*)^* = A$ ч.т.д.

(4) $\|A^*\| = \|A\|$

Док-во: $\|A^*\| \overset{(1)}{\le} \|A\| \overset{(3)}{=} \|(A^*)^*\| \overset{(1)}{\le} \|A^*\| \Rightarrow \|A^*\| = \|A\|$ ч.т.д.

(5) $I: H \to H$ – тожд. оператор. Тогда $I^* = I$

Док-во: $\forall x, y \in H$ имеем $(x, I^*y) \overset{\text{опр}}{=} (Ix, y) = (x, y) = (x, Iy)$

$\Rightarrow I^*y = Iy \quad \forall y \in H \Rightarrow I^* = I$ ч.т.д.

(6) $(AB)^* = B^*A^*$

Док-во: $(x, (AB)^*y) \overset{\text{опр}}{=} ((AB)x, y) = (A(Bx), y) \overset{\text{опр}}{=} (Bx, A^*y) \overset{\text{опр}}{=}$

$= (x, B^*(A^*y)) = (x, (B^*A^*)y) \quad \forall x$

По мини-лемме $(AB)^*y = (B^*A^*)y \ \forall y \Rightarrow (AB)^* = B^*A^*$

7.12 Теорема о применении сопряжённого оператора к нахождению спектра

Теорема: Пусть H и H_1 – гильб. пр-ва, $A: H \to H_1$ – лин. огр. оператор и $\lambda \notin \sigma_p(A)$. Тогда след. усл. эквивалентны:

(1) $\lambda \in \sigma_r(A)$; (2) $\bar\lambda \in \sigma_p(A^*)$

Док-во: (1) $\Rightarrow$ (2): Дано, что $\lambda \in \sigma_r(A)$

Значит, $\operatorname{dom}(A - \lambda I)^{-1}$ не плотна в H

Из общих св-в обратного оператора мы знаем, что $dom(A-\lambda I)^{-1} = im(A-\lambda I)$ и явл. лин. подпр-вом пр-ва H.

Замыкание подпр-ва $im(A-\lambda I)$ обозначим через S.

т.к. $im(A-\lambda I)$ не плотно в H, то $S \neq H$.

Значит, $H = S \oplus S^\perp$; т.е. H явл. прямой суммой S и $S^\perp$, и $S^\perp \neq \{0\}$, иначе получили бы $H = S$, а это не так, т.к. $\lambda \in \sigma_r(A)$

Фиксируем $y \in S^\perp$ так, чтобы $y \neq 0$. Тогда $\forall x \in H$ имеем

$$(x, (A-\lambda I)^* y) = (\underbrace{(A-\lambda I)x}_{\in S}, \underbrace{y}_{\in S^\perp}) = 0 = (x, 0)$$

По мини-лемме заключаем, что $(A-\lambda I)^* y = 0 \Rightarrow (A^* - \bar\lambda I) y = 0$
$\Rightarrow A^* y = \bar\lambda y$, причем $y \neq 0$

Значит, y — СВ оператора A^*, отвечающий СЗ $\bar\lambda$ оператора A^*
$\Rightarrow \bar\lambda \in \sigma_p(A^*) \Rightarrow$ утв. (2) выполнено

(2)$\Rightarrow$(1): На этот раз дано, что $\bar\lambda \in \sigma_p(A^*)$ и $\lambda \notin \sigma_p(A)$

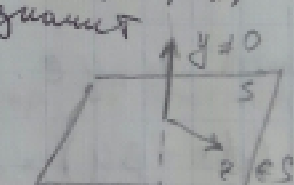
$\exists y \in H: y \neq 0$ и $A^* y = \bar\lambda y \Leftrightarrow (A^* - \bar\lambda I) y = 0 \Leftrightarrow (A-\lambda I)^* y = 0$

Значит, $\forall x \in H$ имеем $(x, 0) = 0 = (x, (A-\lambda I)^* y) \overset{\text{опр}}{=} (\underbrace{(A-\lambda I)x}_{im(A-\lambda I)}, y)$

$\Rightarrow$ вектор $y \perp$ любому вектору из подпр-ва $im(A-\lambda I)$

В силу непр-ти скал. пр-ия по первому аргументу, это означает, что $y \perp$ любому вектору из $S = cl[im(A-\lambda I)]$: если $x \in S$, то $\exists x_1, \dots, x_n, \dots$ — послед-ть векторов из $im(A-\lambda I)$, таких что $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, а значит

$0 = (\underset{im(A-\lambda I)}{x_n}, y) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x, y)$, т.е. $(x, y) = 0$, т.е. $x \perp y$



Итак, мы имеем $y \neq 0$ такой, что $y \in S^\perp \Rightarrow S$ неплотно в H

В самом деле, с помощью векторов из S нельзя подобраться к y ближе, чем на $\|y\| \neq 0$: $\forall z \in S$

$$\|y - z\|^2 \overset{\text{т. Пифагора}}{=} \|y\|^2 + \|-z\|^2 \geqslant \|y\|^2$$

Заметим, что раз мн-во $S = cl[im(A-\lambda I)]$ не плотно в H, то и мн-во $im(A-\lambda I)$ не плотно в H.

Из опр. спектра оператора видим, что ситуация, когда $im(A-\lambda I)$ не плотен в H, может возникнуть в двух случаях: либо, когда $(A-\lambda I)$ не обратим (т.е. когда $\lambda \in \sigma_p(A)$), либо когда $\lambda \in \sigma_r(A)$. Но по усл. т. $\lambda \notin \sigma_p(A) \Rightarrow \lambda \in \sigma_r(A)$ ч.т.д. (выполнено усл. (1))

7.13 Ограниченные самосопряжённые операторы

Опр. Пусть H — гильб. пр-во и $A: H \to H$ — лин. огр. оператор. Говорят, что A — самосопряжённый, если $A = A^*$, т.е. если $\forall x, y \in H$ имеем $(Ax, y) = (x, Ay)$

Теорема (о точечном спектре самосопряжённого ограниченного оператора):

Все СЧ самосопр. огр. оператора вещественны, а СВ, отв. различным СЗ, ортогональны друг другу.

Док-во: Пусть λ – СЗ оператора A. Тогда $\exists\ x \in H,\ x \neq 0:\ Ax = \lambda x$

$$\lambda \|x\|^2 = \lambda(x,x) = (\lambda x, x) = (Ax, x) = (x, Ax) = (x, \lambda x) = \overline{(\lambda x, x)} = \bar{\lambda}(x,x) = \bar{\lambda}\|x\|^2$$

Поскольку $\|x\| \neq 0 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}$, т.е. $\lambda \in \mathbb{R}$

Пусть λ и μ – два различных СЗ оператора $A \Rightarrow \exists\ x, y \in H,\ x \neq 0,\ y \neq 0:$

$Ax = \lambda x$ | умножим справа на y

$Ay = \mu y$ | умножим слева на x

$(Ax, y) = (\lambda x, y) = \lambda(x,y)$ | вычитаем одно из другого

$(x, Ay) = (x, \mu y) \underset{\text{т.к. } \mu \in \mathbb{R}}{=} \mu(x,y)$

$0 \underset{\text{т.к. } A \text{ – самосопр.}}{=} (Ax, y) - (x, Ay) = \underset{\neq 0 \text{ по усл. т.}}{(\lambda - \mu)}(x,y) \Rightarrow (x,y) = 0$, т.е. $x \perp y$ ч.т.д.

Опр. Пусть H – гильб. пр-во, $A: H \to H$ – лин. оператор и $S \subset H$ – подпр-во в H. Говорят, что S явл. <u>инвариантным подпространством</u> оператора A, если $\forall x \in S$ имеем $Ax \in S$

<u>Примеры</u> инвариантных подпр-в:

(1) Всё пр-во H явл. инв. отн. $\forall$ оператора $A: H \to H$

(2) Нулевое подпр-во (т.е. $S = \{0\}$)

(3) Фикс. число λ и обозначим через S_λ совокупность всех СВ оператора $A: H \to H$, отв. СЗ λ, и нулевого вектора $0 \in H$. Убедимся, что S_λ – инв. подпр-во оператора A.

Пусть $x, y \in S_\lambda$ и α, β – числа. Тогда $Ax = \lambda x$, $Ay = \lambda y$ и

$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = \alpha \cdot \lambda x + \beta \cdot \lambda y = \lambda(\alpha x + \beta y)$ т.е. $\alpha x + \beta y \in S_\lambda$ ч.т.д.

<u>Напоминание</u>: Если S – подпр-во в H, то мн-во $\{x \in H \mid \forall y \in S\ x \perp y\}$ наз. ортог. дополнением к подпр-ву S и обозн. $S^\perp$

Теорема (об инвариантном подпр-ве):

Пусть H – гильб. пр-во, $A: H \to H$ – самосопряжённый огр. оператор и $S \subset H$ – инвариантное подпр-во оператора A. Тогда $S^\perp$ тоже явл. инв. подпр-вом оператора A.

Док-во: Если $x \in S^\perp$, то $\forall y \in S$ имеем

$(y, Ax) = (Ay, x) = 0$, т.к. $Ay \in S \Rightarrow \forall x \in S^\perp$ вектор Ax ортогонален любому вектору $y \in S$, т.е. $Ax \in S^\perp \Rightarrow S^\perp$ – инв. подпр-во оператора A ч.т.д.

Теорема (о норме самосопряженного оператора) (б/д):

Если $A: H \to H$ – самосопр. оператор, то $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} |(Ax, x)| = \sup\limits_{\|x\| = 1} |(Ax,x)| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{|(Ax,x)|}{\|x\|^2}$

7.14 Компактные операторы

Опр. Пусть H, H_1 – гильб. пр-ва и $A: H \to H_1$ – лин. оператор. Говорят, что A явл.

<u>Компактным оператором</u>, если существует послед-ть $A_1, \dots, A_n, \dots$ лин. операторов такая, что

(1) $\forall n$ $A_n : H \to H_1$ и явл. ограниченным;
(2) $\forall n$ $\dim(\operatorname{im} A_n) < +\infty$
(3) $A_n \to A$ при $n \to \infty$

<u>Замечание</u> В этом пункте операторы, обладающие св-вом (2), будем для краткости называть конечномерными, хотя правильнее было бы называть их операторами с конечномерным образом

<u>Св-ва компактных операторов</u>

(1) Если $A : H \to H_1$ и $B : H \to H_1$ - лин. компактные операторы, то $\forall \alpha, \beta$ - числа оператор $\alpha A + \beta B : H \to H_1$ тоже явл. компактным

<u>Док-во</u>: A - компактен $\Rightarrow \exists A_1, \dots, A_n, \dots$, удовл. св-вам (1)-(3) из опр.
B - компактен $\Rightarrow \exists B_1, \dots, B_n, \dots$ -//-

Убедимся, что послед-ть $\alpha A_1 + \beta B_1, \alpha A_2 + \beta B_2, \dots, \alpha A_n + \beta B_n, \dots$ обладает св-вами (1)-(3) применимо к $\alpha A + \beta B$

1) $\forall n$ $\alpha A_n + \beta B_n$ явл. огр., т.к. $\|\alpha A_n + \beta B_n\| \leq \|\alpha A_n\| + \|\beta B_n\| = |\alpha| \cdot \|A_n\| + |\beta| \cdot \|B_n\| < +\infty$

2) $\forall n$ $\dim[\operatorname{im}(\alpha A_n + \beta B_n)] < +\infty$, т.к.
$\operatorname{im}(\alpha A_n + \beta B_n) = \{x \in H_1 \mid \exists y \in H : x = (\alpha A_n + \beta B_n) y\} \subset \operatorname{im} A_n \cup \operatorname{im} B_n$
$\Rightarrow \dim[\operatorname{im}(\alpha A_n + \beta B_n)] \leq \dim(\operatorname{im} A_n) + \dim(\operatorname{im} B_n) < +\infty$

3) $\alpha A_n + \beta B_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \alpha A + \beta B$, т.к. $A_n \xrightarrow[n \to \infty]{} A$, $B_n \xrightarrow[n \to \infty]{} B$ и предел послед-ти линеен ч.т.д.

(2) Если A компактен, то A ограничен

<u>Док-во</u>: A компактен $\Rightarrow \exists A_1, \dots, A_n, \dots$, уд. св-вам (1)-(3) из опр., в частности, $\forall n$ A_n - огр и $A_n \xrightarrow[n \to \infty]{} A$

Но из п. 7.4 мы знаем, что предел A послед-ти огр. операторов $A_1, \dots, A_n, \dots$ сам явл. огр. оператором (причем $\|A\| = \lim \|A_n\|$ ч.т.д.

(3) Если $A : H \to H_1$ огр. и $\dim H_1 < +\infty$, то A компактен

<u>Док-во</u>: очевидно: достаточно положить $A_n = A$ в опр.

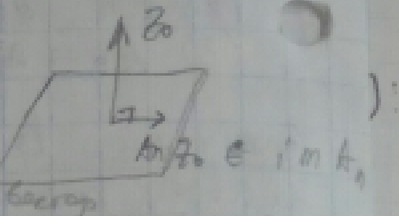
(4) Пусть $I : H \to H$ - тожд. оператор. Тогда след. два утв. эквивалентны
(а) I компактен (б) $\dim H < +\infty$

<u>Док-во</u>: б) $\Rightarrow$ а) Следует из (3), т.к. $\|I\| = 1$

а) $\Rightarrow$ б) От противного, т.е. предположим, что I компактен и $\dim H = \infty$.
Тогда $\exists A_1, \dots, A_n, \dots$ - послед-ть лин. операторов такая, что
((1)) $\forall n$ $A_n : H \to H$ - огр.
((2)) $\forall n$ $\dim(\operatorname{im} A_n) < +\infty$
((3)) $A_n \to I$ при $n \to \infty$, т.е. $\|I - A_n\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Фиксируем n. Поскольку $\dim H = \infty$, а $\dim(\operatorname{im} A_n) < +\infty$, то $\exists y_1, \dots y_N$, образующих ОНБ в $\operatorname{im} A_n$ (конечно, $N = \dim(\operatorname{im} A_n)$) и $\exists y_0 \in H$,

который линейно независим от $y_1, \dots, y_N$ (т.к. иначе $\dim H = N < +\infty$)
Положим (как в процессе ортог. Г-Ш) $\tilde{y}_0 = y_0 - \sum_{k=1}^{N} (y_0, y_k) y_k$ и
$z_0 = \frac{\tilde{y}_0}{\|\tilde{y}_0\|}$. Тогда $\|z_0\| = 1$ и $\forall\, k = 1, \dots, N$ $(z_0, y_k) = 0$



Другими словами, мы нашли единичный вектор z_0, который $\perp$ любому вектору из $\operatorname{im} A_n$:

Поэтому можем написать: $\|I - A_n\| = \sup_{\|x\|=1} \|(I - A_n)x\| \geqslant \|(I - A_n) z_0\| =$
$= \|z_0 - A_n z_0\| \geqslant \|z_0\| = 1$
по т. Пифагора $\|z_0 - A_n z_0\|^2 = \|z_0\|^2 + \|A_n z_0\|^2 \geqslant \|z_0\|^2$

Тем самым доказали, что $\forall n$ $\|I - A_n\| = 1$. Это противоречит тому, что выполняется усл. ((3)): $\|I - A_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\Rightarrow$ а) $\Rightarrow$ б) ч.т.д.

(5) Пусть $A: H_1 \to H_2$ компактен, а операторы $B: H \to H_1$ и $C: H_2 \to H_3$ ограничены. Тогда оба оператора $AB: H \to H_2$ и $CA: H_1 \to H_3$ компактен.

Док-во: Вытекает прямо из опр. компактного оператора и общих свойств нормы оператора:

A - компактен $\Rightarrow$ $\exists$ послед.-ть $A_1, \dots, A_n, \dots$ лин. операторов такая, что

((1)) $\forall n$ $A_n: H_1 \to H_2$ - огр. ((2)) $\forall n$ $\dim(\operatorname{im} A_n) < +\infty$ ((3)) $A_n \to A$ при $n \to \infty$

Положим $B_n = A_n B: H \to H_2$ и $C_n = C A_n: H_1 \to H_3$

Прямая проверка показывает, что для них вып. св-ва ((1))-((3)) применительно к операторам AB и CA соотв. В самом деле:

1) $\|B_n\| = \|A_n \cdot B\| \leqslant \|A_n\| \cdot \|B\| < +\infty$ $\Rightarrow B_n$ - огр.
$\|C_n\| = \|C \cdot A_n\| \leqslant \|C\| \cdot \|A_n\| < +\infty$ $\Rightarrow C_n$ - огр.

2) $\dim(\operatorname{im} B_n) \leqslant \dim(\operatorname{im} A_n) < +\infty$ потому, что $\operatorname{im} B_n = \operatorname{im} A_n B =$
$= \{x \in H_2 \mid \exists\, y \in H: x = (A_n B) y\} \subset \{x \in H_2 \mid \exists\, z \in H_1: x = A_n z\} = \operatorname{im} A_n$)
ведь в качестве z можно взять By

$\Rightarrow \dim(\operatorname{im} B_n) \leqslant \dim(\operatorname{im} A_n)$

Неравенство $\dim(\operatorname{im} C_n) \leqslant \dim(\operatorname{im} A_n) < +\infty$ доказывается аналогично.

3) $\|AB - B_n\| = \|AB - A_n B\| = \|(A - A_n)B\| \leqslant \|A - A_n\| \cdot \|B\| \to 0$ при $n \to \infty$

Аналогично $\|CA - C_n\| = \|CA - CA_n\| = \|C(A - A_n)\| \leqslant \|C\| \cdot \|A - A_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ч.т.д.

(6) Пусть $A: H \to H_1$ - компактный обратимый оператор и пусть $\dim H = \infty$. Тогда A^{-1} не явл. ограниченным.

Док-во: (от противного) Пусть A^{-1} ограничен. Тогда $\underbrace{A^{-1} A}_{\text{огр.}\cdot\text{комп.}} = \underbrace{I_H}_{\text{тожд. } I_H: H \to H}$

Значит, I_H - компактен. По св-ву (4) $\dim H < +\infty$. по (5) $\Rightarrow A^{-1}A$ - компакт.
Пришли к противоречию с условием $\dim H = +\infty$ ч.т.д.

Замечание: Св-во (6) м.б. сформулировано ещё и в терминах спектра: если A компактен и $\dim H = \infty$, то $0 \in \sigma(A)$.

В самом деле, если мы допустим противное, то $0 \in \rho(A)$, т.е. при $\lambda = 0$ оператор $(A-\lambda I)^{-1} = A^{-1}$ будет обратим и определен во всем пр-ве H. Но тогда по т. Банаха он будет ограничен, что противоречит св-ву (6).

Теорема (о существовании базиса из СВ компактного самосопряженного оператора) (б/д):

Пусть H - гильб. пр-во, $\dim H \neq 0$, $A: H \to H$ - компактный самосопр. оператор. Тогда в H сущ. ОНБ из СВ оператора A, т.е. таких векторов $x_1, .., x_n, ...$, что
$\forall n$ $\|x_n\| = 1$; $\forall n \neq m$ $x_n \perp x_m$; и
$\forall n$ $Ax_n = \lambda_n x_n$, где λ_n - СЗ оператора A

Замечание. В случае $\dim H < +\infty$ т. означает, что в H $\exists$ базис, в котором матрица оператора A становится диагональной.

§ 8. Интегральные уравнения

8.1 Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра и примеры задач, приводящих к интегральным уравнениям.

Опр. Интегральным уравнением наз. такое ур-ие, в котором искомая ф-ия входит под знаком интеграла.

Замечание 1: Это опр. столь же неудачно, как если бы мы опр. д.у. как ур-ие содержащее искомую ф-ию под знаком производной (например ур-ие $\frac{dx}{dt} = x(x(t))$ - не д.у.)

Важнейшими примерами инт. ур-ий являются следующие:

известная ф-ия „ядро" ... только под знаком $\int$

$\int_a^b K(t,s)x(s)ds + f(t) = 0$ - инт. ур-ие Фредгольма I рода

b ← постоянным

$\int_a^b K(t,s)x(s)ds + f(t) = x(t)$ - инт. ур-ие Фредгольма II рода

t ← переменным

$\int_a^t K(t,s)x(s)ds + f(t) = 0$ - инт. ур-ие Вольтерра I рода

под знаком $\int$ и вне его

$\int_a^t K(t,s)x(s)ds + f(t) = x(t)$ - инт. ур-ие Вольтерра II рода

Здесь $K: [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{C}$, $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ - известные (заданные) ф-ии, а $x: [a,b] \to \mathbb{C}$ - искомая ф-ия. Ф-ия K наз. ядром инт. ур-ия

Замечание: Уравнение Вольтерра явл. частным случаем ур-ий Фредгольма, т.к.

$$\int_a^t K(t,s)\,x(s)\,ds = \int_a^b \tilde{K}(t,s)\,x(s)\,ds, \text{ где } \tilde{K}(t,s) = \begin{cases} K(t,s), & \text{если } a \le s \le t \\ 0, & \text{если } t < s \le b \end{cases}$$

важно ≤ ... доопределено ф-ию

Замечание: В курсе д.у. доказывали, что д.у. $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ (*) с нач. усл. $x(t_0) = x_0$ экв. (нелинейному) инт. ур-ию

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))\,ds \quad (**)$$

Мы доказывали с помощью метода последовательных приближений, что решение ур-ие (**) существует и единственно. Тем самым мы доказывали сущ. и ед. реш. д.у. (*)

Приведем еще один пример сведения нач. задачи для д.у. к инт. ур-ию:

$$\begin{cases} 1 \cdot x^{(n)}(t) + p_1(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + p_n(t)x(t) = f(t), \\ x^{(n-1)}(a) = x^{(n-2)}(a) = \ldots = x'(a) = x(a) = 0 \\ a \le t \le b \end{cases}$$

Положим $x(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t y(s)(t-s)^{n-1}\,ds$ (***), где

$y:[a,b]\to\mathbb{C}$ – новая искомая ф-ия

Последовательно дифф-ем рав-во (***):

$$x'(t) = \underbrace{\frac{n-1}{(n-1)!}\int_a^t y(s)(t-s)^{n-2}\,ds}_{\text{производная от подинт. ф-ии}} + \underbrace{\frac{1}{(n-1)!}\,y(t)(t-t)^{n-1}}_{\text{значение под инт. ф-ии при } s=t} = \frac{1}{(n-2)!}\int_a^t y(s)(t-s)^{n-2}\,ds$$

...

$$x^{(k)}(t) = \frac{1}{(n-k-1)!}\int_a^t y(s)\,t^{n-k-1}\,ds, \text{ если } 1\le k\le n-1$$

$$x^{(n-1)}(t) = \int_a^t y(s)\,ds \text{ – производная только по пределу, } \frac{dy(s)}{dt}=0$$

$$x^{(n)}(t) = y(t)$$

Замечание: рав-во (***) на самом деле означает, что вместо „старой" искомой ф-ии $x(t)$ мы решили взять „новую" искомую ф-ию $y(t) = x^{(n)}(t)$

Замечание: Начальные условия

$x^{(n-1)}(a) = x^{(n-2)}(a) = \ldots = x'(a) = x(a) = 0$ (интеграл $\int_a^a = 0$, а $x^{(n)}(t) = y(t)\big|_{t=a} \neq 0$) вып-ся автоматически

Подставив найденные выше выражения для $x^{(k)}(t)$ в левую часть решаемого д.у., получим

$$y(t) + \frac{p_1(t)}{0!}\int_a^t y(s)\,ds + \frac{p_2(t)}{1!}\int_a^t y(s)(t-s)\,ds + \ldots + p_n(t)\frac{1}{(n-1)!}\int_a^t y(s)(t-s)^{n-1}\,ds = f(t)$$

или $$y(t) + \int_a^t K(t,s)\,y(s)\,ds = f(t)$$, где

$$K(t,s) = p_1(t) + \frac{1}{1!}p_2(t)(t-s) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}p_n(t)(t-s)^{n-1}$$

т.о. кал. задача для лин. д.у. n-го порядка с нулевыми нач. усл. сведена к инт. ур-ию Вольтерра II рода

Замечание: Теория инт. ур-ий – это язык (как правило) экв. языку д.у.

8.2 Интегральный оператор Гильберта – Шмидта

Опр Пусть $K:[a,b]\times[a,b]\to\mathbb{C}$ – фикс. ф-ия из пр-ва $L_2([a,b]\times[a,b])$, т.е. такая, что

$$\int_a^b\int_a^b |K(t,s)|^2\,dt\,ds < +\infty$$

Интегральным оператором Гильберта – Шмидта наз. оператор $A: L_2[a,b]\to L_2[a,b]$, сопоставляющий каждой ф-ии $x\in L_2[a,b]$ ф-ию $Ax\in L_2[a,b]$ по правилу

$$(Ax)(t) = \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds \quad (*)$$

При этом ф-ия K наз. ядром оператора Г-Ш.

Замечание: Многие св-ва решений инт. ур-ий могут быть получены с помощью общих теорем об операторах в гильбертовом пр-ве. Это ясно, например, из того, что ур-ие Фредгольма II рода

$$x(t) = \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds + f(t)$$

может быть записано в операторном виде $x = Ax + f$, где A - оператор Г-Ш (и

Теорема (о компактности оператора Г-Ш):

Инт. оператор Г-Ш A, заданный ф-лой (*), явл. лин. компактным оператором, переводящим пр-во $L_2[a,b]$ в себя. При этом его норма уд. нер-ву

$$\|A\| \leq \|K\|_{L_2([a,b]\times[a,b])} = \left\{\int_a^b\int_a^b |K(t,s)|^2 dt\,ds\right\}^{1/2}$$

Док-во: Лин. оператора Г-Ш очевидно следует из линейности интеграла. Убедимся, что $\forall x \in L_2[a,b]$ ф-ие Ax лежит в $L_2[a,b]$. В самом деле, $\forall t \in [a,b]$ в силу нер-ва К-Б имеем

$$|(Ax)(t)|^2 = |\underbrace{\int_a^b \overset{t\text{ - параметр, т.е. фикс. число}}{K(t,s)}\,\overline{x(s)}\,ds}_{\text{задает скал. пр-ие}}|^2 \leq \int_a^b |K(t,s)|^2 ds \cdot \int_a^b |\overline{x(s)}|^2 ds \leq \|x\|^2 \int_a^b |K(t,s)|^2 ds$$

($|\overline{x(s)}| = |x(s)|$)

Проинтегрировав это нер-во по t по $[a,b]$, получим

$$\|Ax\|^2_{L_2[a,b]} = \int_a^b |(Ax)(t)|^2 dt \leq \|x\|^2 \int_a^b\int_a^b |K(t,s)|^2 ds\,dt =$$

$$= \|x\|^2_{L_2[a,b]} \cdot \|K\|^2_{L_2([a,b]\times[a,b])} \underset{\text{т.к. } \in L_2}{<} +\infty \Rightarrow Ax \in L_2[a,b]$$

Кроме того, отсюда следует, что

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_{L_2[a,b]} \leq 1} \|Ax\|_{L_2[a,b]} \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|x\| \cdot \|K\| = \|K\|$$

т.е. мы доказали оценку нормы оператора A из теоремы.
Осталось доказать, что A компактен. Сделаем это по опр. комп. оператора, для чего построим послед-ть $A_1, A_2, \dots, A_N, \dots$ лин. операторов такую, что

(1) $\forall N \quad A_N : L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ и $\|A_N\| < +\infty$;
(2) $\forall N \quad \dim(\operatorname{im} A_N) < +\infty$
(3) $A_N \to A$ при $N \to \infty$

I шаг: Построим операторы A_N. Пусть $\{x_n(t)\}_{n=1,2,\dots} = \{x_1(t), \dots, x_n(t) \dots\}$ - какая-нибудь полная ортонормированная система ф-ий в $L_2[a,b]$. Убедимся, что система ф-ий $\{x_n(t)\overline{x_m(s)}\}_{n,m=1,2,\dots}$, образованная всевозможными попарными пр-ями $x_n(t)\overline{x_m(s)}$, явл. полной ортонормир. системой ф-ий в $L_2([a,b]\times[a,b])$

В самом деле, её ортонормированность следует из вычисления:

$$(x_n(t)\overline{x_m(s)}, x_{n_0}(t)\overline{x_{m_0}(s)})_{L_2([a,b]\times[a,b])} = \int_a^b\int_a^b [x_n(t)\overline{x_m(s)}] \cdot \overline{[x_{n_0}(t) \cdot \overline{x_{m_0}(s)}]}\,dt\,ds$$

т. Фубини в L_2

$$= \left[\int_a^b x_n(t)\overline{x_{n_0}(t)}\,dt\right] \cdot \left[\int_a^b x_{m_0}(s)\overline{x_m(s)}\,ds\right] =$$

символы Кронекера

$$= (x_n(t), x_{n_0}(t))_{L_2[a,b]} \cdot (x_{m_0}(s), x_m(s))_{L_2[a,b]} = \delta_{n,n_0} \cdot \delta_{m_0,m} = \begin{cases} 1, & \text{при } n=n_0 \text{ и } m=m_0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Значит, $\{x_n(t)\overline{x_m(s)}\}$ ортонормирована в $L_2([a,b]\times[a,b])$. Чтобы убедиться в её полноте, нужно проверить, что её нельзя пополнить, т.е. что всякая ф-ие $g \in L_2([a,b]\times[a,b])$, ортогональная каждой ф-ии $x_n(t)\overline{x_m(s)}$ обязана быть равной нулю. Итак,

$$0 = (g(t,s), x_n(t)\overline{x_m(s)})_{L_2([a,b]\times[a,b])} = \int_a^b\int_a^b g(t,s)\,\overline{x_n(t)\overline{x_m(s)}}\,dt\,ds =$$

$$= \int_a^b \left[\int_a^b g(t,s)\,x_m(s)\,ds\right] \overline{x_n(t)}\,dt = \left(\int_a^b g(t,s)\,x_m(s)\,ds,\ x_n(t)\right)_{L_2[a,b]}$$

Поскольку это рав-во справедливо $\forall n$, а послед-ть ф-ций $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ полна в $L_2[a,b]$, то $\int_a^b g(t,s)\, x_m(s)\, ds = 0$ как ф-ция $t \mapsto \int_a^b g(t,s)\, x_m(s)\, ds$ пр-ва $L_2[a,b]$, т.е. равняется нулю для почти всех $t \in [a,b]$

Тогда $\forall\, m = 1, 2, \ldots$

$$0 = \int_a^b g(t,s)\, x_m(s)\, ds = \int_a^b \overline{\overline{g(t,s)}}\, \overline{\overline{x_m(s)}}\, ds = \left(\overline{g(t,s)},\, x_m(s)\right)_{L_2[a,b]}$$

для почти всех t

Поскольку послед-ть ф-ций $x_1(s), x_2(s), \ldots, x_m(s) \ldots$ - полна в $L_2[a,b]$, то $\overline{g(t,s)} = 0$ для почти всех $t, s \in [a,b]$, т.е. $g(t,s) = 0$ как ф-ция пр-ва $L_2([a,b]\times[a,b])$. Это и значает, что система $\{x_n(t)\overline{x_m(s)}\}$ полна в $L_2([a,b]\times[a,b])$

Поскольку ф-ция $K(t,s)$ - ядро оператора A - лежит в $L_2([a,b]\times[a,b])$, она разлагается в ряд по полной ортонормир. системе $\{x_n(t)\overline{x_m(s)}\}$:

$$K(t,s) = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{mn}\, x_n(t)\, \overline{x_m(s)}, \text{ где } a_{mn} \text{ - некоторые числа}$$

(на самом деле мы знаем, что это коэф. Фурье ф-ции K отн. ортонормир. системы $\{x_n(t)\overline{x_m(s)}\}$)

Для каждого натурального числа N положим

$K_N(t,s) = \sum_{m,n=1}^{N} a_{mn}\, x_n(t)\, \overline{x_m(s)}$ и обозначим через A_N оператор Г-Ш с ядром K_N

II шаг Изучение св-в операторов A_N. Убедимся, что

(1) $\forall N$ A_N отображает $L_2[a,b]$ в $L_2[a,b]$ и $\|A_N\| < +\infty$
(2) $\forall N$ $\dim(\operatorname{im} A_N) < +\infty$ (3) $A_N \to A$ при $N \to \infty$

Как только св-ва (1)-(3) будут доказаны, мы сможем утверждать, что оператор A компактен на основании определения компактного оператора.

(1) $\forall N$ ф-ция $K_N(t,s)$ явл. конечной лин. комб. ф-ций $x_n(t)\overline{x_m(s)}$ пр-ва $L_2([a,b]\times[a,b])$, а значит, сама лежит в этом пр-ве.

Следовательно, $\|K_N\|_{L_2([a,b]\times[a,b])} < +\infty$. Поэтому оператор A_N явл. оператором Г-Ш. По доказанному выше он отображает $L_2[a,b]$ в $L_2[a,b]$ и $\|A_N\| < +\infty$ ч.т.д. 1

(2) Ясно, что $\forall N$ $\operatorname{im} A_N \subset \underbrace{\mathrm{Lin}}_{\text{лин. оболочка}} \{A(x_n(t)\overline{x_m(s)})\}_{m,n=1,\ldots,N}$

Поэтому $\dim(\operatorname{im} A_N) \leq \dim \mathrm{Lin}\{A(x_n(t)\overline{x_m(s)})\}_{m,n=1,\ldots,N} \leq N^2 < +\infty$

(3) $A_N \xrightarrow[N\to\infty]{} A \iff \|A - A_N\| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$, а это следует из

$$\|A - A_N\| \leq \|K(t,s) - K_N(t,s)\|_{L_2([a,b]\times[a,b])} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

потому, что $K_N \to K \iff K(t,s) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}\, x_n(t)\, \overline{x_m(s)} =$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{m,n=1}^{N} a_{mn} x_n(t) \overline{x_m(s)} = \lim_{N\to\infty} K_N(t,s)$$

т. о компактности оператора Г-Ш доказана

Теорема (об операторе, сопряженном оператору Г-Ш):

Пусть A - оператор Г-Ш с ядром $K(t,s)$. Тогда сопряжённый ему оператор A^* также явл. оператором Г-Ш, причем его ядро $K^*(t,s)$ уд. соотношению

(как для матриц)

$K^*(t,s) = \overline{K(s,t)}$, где черта означает компл. сопряжение

Док-во: Определим оператор $B: L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ ф-лой

$$(By)(t) = \int_a^b \overline{K(s,t)}\, y(s)\,ds, \quad \text{где } y \in L_2[a,b]$$

Поскольку $\|\overline{K(s,t)}\|_{L_2([a,b]\times[a,b])} = \int_a^b\int_a^b |\overline{K(s,t)}|^2 ds\,dt = \int_a^b\int_a^b |K(s,t)|^2 ds\,dt =$
$= \|K(s,t)\| < +\infty$, то B явл. оператором Г-Ш

Убедимся, что $\forall\, x, y \in L_2[a,b]$ справедливо рав-во

$$(Ax, y)_{L_2[a,b]} = (x, By)_{L_2[a,b]}$$

Это рав-во будет означать, что $B = A^*$ и тем самым докажем теорему

менем порядок инт.

$$(Ax,y)_{L_2[a,b]} = \int_a^b (Ax)(t)\overline{y(t)}\,dt = \int_a^b \Big[\int_a^b K(t,s)x(s)\,ds\Big]\overline{y(t)}\,dt =$$
$$= \int_a^b \Big[\int_a^b K(t,s)\overline{y(t)}\,dt\Big] x(s)\,ds = \quad \begin{pmatrix} s = \tau \\ t = \sigma \end{pmatrix}$$
$$= \int_a^b x(\tau)\Big[\int_a^b K(\sigma,\tau)\overline{y(\sigma)}\,d\sigma\Big]d\tau = \quad \begin{pmatrix} \tau = t \\ \sigma = s \end{pmatrix}$$
$$= \int_a^b x(t)\,\underbrace{\Big[\int_a^b \overline{K(s,t)}\,y(s)\,ds\Big]}_{(By)(t)}\,dt = \int_a^b x(t)\overline{(By)(t)}\,dt = (x, By)_{L_2[a,b]} \text{ ч.т.д.}$$

8.3 Решение интегральных уравнений с вырожденным ядром

Опр. Говорят, что ядро $K: [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{C}$ явл. <u>вырожденным</u>, если $\exists$ n - натуральное число и $\forall\, j = 1, 2, \ldots, n$ $\exists$ ф-ии $P_j, Q_j \in L_2[a,b]$ такие, что

$$K(t,s) = \sum_{j=1}^{n} P_j(t)\,Q_j(s) \qquad (*)$$

<u>Замечание</u>: Без ограничения общности можно считать, что набор ф-ий $P_1(t), P_2(t), \ldots, P_n(t)$ явл. лин. нез. и при этом набор ф-ий $Q_1(s), \ldots, Q_n(s)$ тоже явл. лин. нез.

В самом деле, допустим, что какая-то ф-ия P_j линейно выражается через остальные. Пусть $j = n$. Тогда $P_n(t) = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j P_j(t)$, где α_j - нек. числа $\Rightarrow$ в этом случае вырожденное ядро $(*)$ можно записать с использованием меньшего числа слагаемых:

$$K(t,s) = \sum_{j=1}^{n} P_j(t)Q_j(s) = \sum_{j=1}^{n-1} P_j(t)Q_j(s) + \Big[\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j P_j(t)\Big] Q_n(s) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n-1} P_j(t)\,[Q_j(s) + \alpha_j Q_n(s)] = \sum_{j=1}^{n-1} P_j(t)\,\tilde{Q}_j(s),$$

где $\tilde{Q}_j(s) = Q_j(s) + \alpha_j Q_n(s)$

Исключая таким образом лин. зависимые ф-ии как из набора $P_1(t), \dots, P_n(t)$, так и из набора $Q_1(s), \dots, Q_n(s)$, мы будем каждый раз уменьшать кол-во слагаемых в выражении

$$K(t,s) = \sum_{j=1}^{n} P_j(t) Q_j(s) \qquad (*)$$

для вырожденного ядра. Ясно, что за конечное число шагов мы дойдем до ф-лы $(*)$, содержащей минимальное число слагаемых. При этом набор ф-ий $P_1(t), \dots, P_n(t)$ будет лин. нез. и набор ф-ий $Q_1(s), \dots, Q_n(s)$ тоже будет лин. нез. В дальнейшем считаем, что такой переход к лин. нез. $P_1, \dots, P_n$ и $Q_1, \dots, Q_n$ уже осуществлён изначально

В этом пункте мы рассм. один метод решения инт. ур-ия Фредгольма II рода

$$x(t) = \int_a^b K(t,s)\, x(s)\, ds + f(t) \qquad (1)$$

с вырожденным ядром $K(t,s) = \sum_{j=1}^{n} P_j(t) Q_j(s)$. Подставив выражение для ядра в ур-ие (1) получим

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} P_j(t) \underbrace{\int_a^b Q_j(s) x(s)\, ds}_{= q_j \text{ - это нек. число (неопределенный коэф.)}} + f(t)$$

Тем самым мы теперь знаем решение $x(t)$ „с точностью до неопр. коэф-в" $q_1, q_2, \dots, q_n$:

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} q_j P_j(t) + f(t) \qquad (2)$$

Подставим это выражение в ур-ие (1)

$$\sum_{j=1}^{n} q_j P_j(t) + \cancel{f(t)} = \int_a^b \underbrace{\left[\sum_{j=1}^{n} P_j(t) Q_j(s)\right]}_{K(t,s)} \cdot \underbrace{\left[\sum_{k=1}^{n} q_k P_k(s) + f(s)\right]}_{x(s)} ds + f(t) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} P_j(t) \underbrace{\left[\sum_{k=1}^{n} q_k \underbrace{\int_a^b Q_j(s) P_k(s)\, ds}_{\text{„обозн." } a_{jk}} + \underbrace{\int_a^b Q_j(s) f(s)\, ds}_{b_j} \right]} + \cancel{f(t)}$$

Числа a_{jk} и b_j нам известны, т.к. известны Q_j, P_k и f

Поскольку ф-ии $P_1(t), \dots, P_n(t)$ лин. нез., то $\forall j = 1, \dots, n$ вып. рав-во

$$q_j = \sum_{k=1}^{n} q_k a_{jk} + b_j \qquad (3)$$

т.о. мы свели решение инт. ур-ия (1) к решению системы алг. ур-ий (3): решив эту систему, мы по ф-ле (2) найдем решение исх. ур-ие (1) и наоборот — если система (3) не имеет решения, то и инт. ур-ие (1) не имеет решения

<u>Замечание</u>: Если ядро инт. ур-ие Фредгольма II рода невырожденно, но лежит в $L_2([a,b]\times[a,b])$, то мы можем разложить его в этом пр-ве по какой-нибудь произвольной ортонормир. системе вида $\{X_n(t)\overline{X_m(s)}\}_{n,m=1,2,\dots}$:

$$K(t,s) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \alpha_{nm} X_n(t) \overline{X_m(s)}$$

а затем можем отбросить все члены с большими номерами, получив

$$K_N(t,s) = \sum_{m,n=1}^{N} \alpha_{nm} X_n(t) \overline{X_m(s)}$$

Это ядро уже вырожденное. Значит, мы можем решить ур-ие

$$x(t) = \int_a^b K_N(t,s)\,x(s)\,ds + f(t) \qquad (4)$$

указанным выше способом. Поскольку $K_N \to K$ при $N \to \infty$, то интуитивно мы можем ожидать, что решение ур-ие (4) при $N \to \infty$ сх-ся к решению исх. ур-ие $x(t) = \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds + f(t)$

Это реальный метод приближенного (численного) решение ур-ий Фредгольма II рода.

8.4 Альтернатива Фредгольма

Пусть H - гильб. пр-во, $A: H \to H$ - компактный оператор, A^* - его сопряженный. Разрешимость неоднородного ур-ие

$$x - Ax = f \qquad (H)$$

устанавливается с помощью однородного ур-ие

$$x - Ax = 0 \qquad (0)$$

и сопряженного однородного ур-ие

$$y - A^* y = 0 \qquad (C0)$$

следующей теоремой:

Теорема (альтернатива Фредгольма):

Для ур-ие (H) возможны два случая:

(I). Однородное ур-ие (0) имеет только нулевое решение. При этом сопр. однородное ур-ие (C0) также имеет только нулевое решение, а неоднородное ур-ие (H) имеет единственное решение для любой правой части f.

(II) Однородное ур-ие (0) имеет n лин. нз. реш. $x_1, \dots, x_n$, где n - целое положительное число. При этом сопр. одноp. ур-ие (C0) имеет ровно n лин. нез. реш. $y_1, \dots, y_n$, а для разрешимости неодн. ур-ие (H) необх. и дост., чтобы

$$(y_k, f) = 0 \quad \forall\, k = 1, \dots, n \quad \text{(скал. пр-ие)}$$

При выполнении условий общее реш. неодн. ур-ие (H) имеет вид

$$x = x_0 + c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

где x_0 - частное решение (H); $x_1, \dots, x_n$ - лин. нз. реш. (0); $c_1, \dots, c_n$ - const

Замечание: А.Ф., в частности, утверждает, что (0) не может иметь бесконечного кол-ва лин. нз. реш.

Замечание: т.к. оператор Г-Ш компактен (см. 8.2), то А.Ф. имеет прямое отношение к инт. ур-иям

Док-во: А.Ф. мы проведем только для оператора Г-Ш, причем будем считать, что у него вырожденное ядро:

$$K(t,s) = \sum_{i=1}^{m} P_i(t)\,Q_i(s) \qquad (я)$$

Из п. 8.3 мы знаем, что реш. (H)

$$x(t) = \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds + f(t) \qquad (H)$$

с вырожденным ядром (я) экв. решению лин. алгебраич. системы ур-ий

$$q_j = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} q_k + b_j, \quad j = 1, \dots, m, \qquad (1)$$

где $$a_{jk} = \int_a^b Q_j(s) P_k(s)\, ds \quad \text{и} \qquad (2)$$

$$b_j = \int_a^b Q_j(s) f(s)\, ds \qquad (3)$$

Из ф-лы (3) ясно, что решение (0) $x(t) = \int_a^b K(t,s)\, x(s)\, ds$ эквивалентно реш. однородной системы

$$q_j = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} q_k, \quad j = 1, \dots, m \qquad (4)$$

Из п. 8.2 (т. о сопр. операторе к Г-Ш) мы знаем, что A^* имеет ядро

$$K^*(t,s) = \overline{K(s,t)} = \sum_{j=1}^{m} \overline{Q_j(t)}\; \overline{P_j(s)}$$

Поэтому реш. сопр. однородного ур-ия

$$y(t) = \int_a^b K^*(t,s)\, y(s)\, ds \qquad (5) = (\text{CO})$$

экв. реш. однородной системы

$$p_j = \sum_{k=1}^{m} a^*_{jk} p_k, \quad j = 1, \dots, m \qquad (6)$$

где a^*_{jk} вычисляется по той же ф-ле (2), по которой вычисляли a_{jk}:

$$a_{jk} = \int_a^b Q_j(s) P_k(s)\, ds \Rightarrow a^*_{jk} = \int_a^b \overline{P_j(s)} \cdot \overline{Q_k(s)}\, ds = \overline{a_{kj}}$$

Осталось напомнить, что такое p_j в ф-ле (6): это коэф-ты в разложении решения (CO) = (5) по ф-циям $\overline{Q_k(t)}$, т.е. $y(t) = \sum_{k=1}^{m} p_k \overline{Q_k(t)}$.

Теперь мы видим, что если реализуется возможность (I), то (0) имеет только нулевое решение $\Leftrightarrow$ система (4)

$$q_j = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} q_k \quad \text{или} \quad Mq = 0, \text{ где } M = \delta_{jk} - a_{jk}$$

имеет только нулевое решение $\Leftrightarrow \det M = \det(\delta_{jk} - a_{jk}) \neq 0$.

Это будет означать, что определитель матрицы $M^* = \delta_{kj} - \overline{a_{kj}}$, получающейся из M транспонированием и взятием комплексного сопряжения, тоже $\neq 0$:

$$\det M^* = \det(\delta_{jk} - a_{jk})^* = \det(\delta_{kj} - \overline{a_{kj}}) \neq 0$$

Поэтому (6) и (CO) имеют только нулевое решение, а (1) и (H) имеют единственное решение при любой правой части b_j – ч.т.д. (I)

Пусть теперь реализуется возможность (II), т.е. (0) имеет n лин. нз. решений $x_1, \dots, x_n \Leftrightarrow$ (4) $\left(q_j = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} q_k, \ j = 1, \dots, m\right)$ имеет n лин. нз. реш. $q^1 = (q_1^1, \dots, q_m^1), \dots, q^n = (q_1^n, \dots, q_m^n)$. Они связаны с $x_1, \dots, x_n$ формулами $x_k(t) = \sum_{j=1}^{m} q_j^k P_j(t)$

$\Leftrightarrow$ ранг матрицы $M = (\delta_{jk} - a_{jk})$ равен $m - n$

$\Leftrightarrow$ ранг эрмитово-сопр. ей матрицы $M^* = (\delta_{jk} - \overline{a_{kj}})$ тоже равен $m - n$

$\Leftrightarrow$ система (6) $p_j = \sum_{k=1}^{m} a^*_{jk} p_k = \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{kj}}\, p_k$ имеет ровно $m - n$ лин. нз. решений, которые мы обозначим через $p^1 = (p_1^1, \dots, p_m^1), \dots$

$p^n = (p_1^n, \dots, p_m^n)$

$\Leftrightarrow$ (со) $y(t) = \int_a^b K^*(t,s)\, y(s)\, ds$ имеет $m-n$ лин. нз. реш.

$y_i(t) = \sum_{k=1}^m p_k^i \overline{Q_k(t)}$, как и утверждалось в теореме

Теперь проверим, что условие $(y_k, f)=0$ $\forall k=1,\dots n$ явл. необх. и дост. для решения (Н) $x(t) = \int_a^b K(t,s)\, x(s)\, ds + f(t)$

Мы уже знаем, что (Н) разрешимо $\Leftrightarrow$ разрешима система (1), т.е.

$q_j = \sum_{k=1}^m a_{jk} q_k + b_j$, где $a_{jk} = \dots$ и $b_j = \int_a^b Q_j(s) f(s)\, ds$ (1)

Из лин. алгебры известно, что (1) разрешима $\Leftrightarrow$ вектор с компонентами $(b_1,\dots,b_m)$ ортогонален каждому решению сопр. однородной системы. Мы обозначали эту сопр. одн. систему через (б):

$p_j = \sum_{k=1}^m a_{jk}^* p_k = \sum_{k=1}^m \overline{a_{kj}}\, p_k$,

а её лин. нз. решения мы записывали так: $p^1 = (p_1^1, \dots, p_m^1), \dots,$
$p^n = (p_1^n, \dots, p_m^n)$

При этом условие ортогональности вектора $(b_1,\dots,b_m)$ и вектора p^i имеет вид $\sum_{k=1}^m b_k \overline{p_k^i} = 0$

Но это усл. ортогональности экв. усл. ортогональности ф-ии $f(t)$ в (Н) и любого решения (со)

$y_i(t) = \sum_{k=1}^m p_k^i \overline{Q_k(t)}$

В самом деле: $(f, y_i) = \int_a^b f(t) \overline{y_i(t)}\, dt = \int_a^b f(t) \overline{\sum_{k=1}^m p_k^i \overline{Q_k(t)}}\, dt =$

$= \sum_{k=1}^m \overline{p_k^i} \underbrace{\int_a^b f(t)\, Q_k(t)\, dt}_{=b_k} = \sum_{k=1}^m \overline{p_k^i}\, b_k = 0$

Тем самым, условие разрешимости найдено.

Последнее утв. теоремы об общем виде $x = x_0 + c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$ решение (Н) явл. общим св-вом всех лин. ур-ий и систем ур-ий (доказывали в д.у. и в лин. алг.).

8.5 Уравнение с малыми параметрами. Ряд Неймана. Метод последовательных приближений

В этом пункте мы изучим инт. ур-ие Фредгольма II рода с параметром μ

$x(t) = \mu \int_a^b K(t,s)\, x(s)\, ds + f(t)$ или $x = \mu A x + f$, где A – оператор Г-Ш

Если $\mu = 0$, то „решение" очевидно: $x(t) = f(t)$.

Вспомним т. Неймана (п. 7.6) из раздела „Операторы в гильбертовых пространствах":
Если H – гильб. пр-во, $B: H \to H$ – лин. оператор, такой что $\|B\| < 1$, то оператор $I - B$ обратим, $\mathrm{dom}\,(I-B)^{-1} = H$ и имеет место равенство

$$(I - B)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B^n,$$

где $B^0 = I$; и $B^{n+1} = B \cdot B^n$ $\forall n = 0, 1, 2, \dots$

Как мы знаем, оператор Г-Ш

$$(Ax)(t) = \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds$$

ограничен и $\|A\| \leq \|K\|_{L_2([a,b]\times[a,b])} = \left\{\int_a^b\int_a^b |K(t,s)|^2\,dt\,ds\right\}^{1/2} < +\infty$

Поэтому $\forall\, \mu \in \mathbb{C}$ таких, что $|\mu| < 1/\|A\|$ оператор $I - \mu A$ обратим (ведь $\|\mu A\| < 1$) и может быть представлен в виде ряда $(I-\mu A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n A^n$

$\Rightarrow$ для $|\mu| < \frac{1}{\|A\|}$ решение ур-ие $x = \mu A x + f$ м.б. получено так:

$$x - \mu A x = f, \quad (I - \mu A)x = f, \quad x = (I-\mu A)^{-1} f = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n A^n f =$$

$$= f + \mu A f + \mu^2 A^2 f + \ldots \quad \text{- ряд Неймана}$$

Другими словами, при $|\mu| < \frac{1}{\|A\|}$ решение ур-ие $x = \mu A x + f$ м.б. записано в виде бесконечного ряда $x = \sum_{n=0} x_n$, где $x_0 = f$, а каждый последующий член получается из предыдущего по рекуррентной ф-ле $x_{n+1} = \mu A x_n$.

Такой способ нахождения решение наз. методом последовательных приближений.

При этом интуитивно ясно, что частичная сумма $\sum_{n=0}^{N} x_n$ ряда $\sum_{n=0} x_n$ может рассматриваться как приближенное решение ур-ие $x = \mu A x + f$.

Вернемся к ряду Неймана $\sum_{n=0}^{\infty} \mu^n A^n$. Для его построения нужно находить A^n при любом n.

Опр Ядро оператора A^n наз. повторным ядром и обозначается $K_n(t,s)$

Теорема (о повторном ядре оператора Г-Ш):

Если A - оператор Г-Ш с ядром $K(t,s)$, то $\forall\, n = 2, 3, \ldots$ оператор A^n явл. оператором Г-Ш и для повторных ядер справедлива ф-ла

$$K_n(t,s) = \int_a^b K(t,r)\,K_{n-1}(r,s)\,dr \qquad (1)$$

Док-во: по индукции

Допустим, что для некоторого $n = 2, 3, \ldots$ ($n=2$ - база индукции; предположение) ядро $K_{n-1}(t,s)$ лежит в $L_2([a,b]\times[a,b])$ (т.е. допустим, что оператор A^{n-1} явл. оператором Г-Ш) и убедимся в справедливости ф-лы (1) и в том, что $K_n(t,s)$ лежит в $L_2([a,b]\times[a,b])$.

В самом деле, ф-ла (1) вытекает из след. вычисления:

$$\int_a^b K_n(t,s)\,x(s)\,ds \overset{\text{опр}}{=} (A^n x)(t) = A(A^{n-1}x)(t) = \int_a^b K(t,r)\,[A^{n-1}x](r)\,dr =$$

две ф-ии из L_2 ⇒ можем поменять порядок интегр.

$$= \int_a^b K(t,r)\left[\int_a^b K_{n-1}(r,s)\,x(s)\,ds\right]dr = \int_a^b\left[\int_a^b K(t,r)\,K_{n-1}(r,s)\,dr\right]x(s)\,ds$$

$$\Rightarrow K_n(t,s) = \int_a^b K(t,r)\,K_{n-1}(r,s)\,dr$$

т.к. справедливо $\forall\, x(s)$, смотрим как на скалярное пр-ие (см. мини-лемму)

Теперь убедимся, что $K_n \in L_2([a,b]\times[a,b])$:

по ф-ле (1); t, s квадрат модуля, нер-во К-Б K, K_{n-1}

$$\|K_n\|^2_{L_2([a,b]\times[a,b])} = \int_a^b\int_a^b |K_n(t,s)|^2\,dt\,ds = \int_a^b\int_a^b \left|\int_a^b K(t,r)K_{n-1}(r,s)\,dr\right|^2 dt\,ds \leq$$

$$\leq \int_a^b\int_a^b \Big[\underbrace{\int_a^b |K(t,r)|^2\,dr}_{\|K\|^2} \cdot \underbrace{\int_a^b |K_{n-1}(r,s)|^2\,dr}_{\|K_{n-1}\|^2}\Big]\,dt\,ds =$$ ← двойной интеграл - в повторный

вынесем из $\int ds$; не зависит от t, выносим его за $\int$ по dt

$$= \int_a^b\int_a^b |K(t,r)|^2\, dr\, dt \cdot \int_a^b\int_a^b |K_{n-1}(r,s)|^2\, dr\, ds = \|K\|^2_{L_2([a,b]\times[a,b])} \cdot \|K_{n-1}\|^2_{L_2([a,b]\times[a,b])} < \infty$$

конечна по усл. · по предп. · и.е.д.

Используя эту теорему, мы можем записать ряд Неймана в виде:

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n A^n f = f + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n A^n f = f + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \int_a^b K_n(t,s) f(s)\, ds =$$

$$= f(t) + \int_a^b R(t,s;\mu) f(s)\, ds,$$

тождественный оператор отличается от интегрального, поэтому выписали отдельно

где использовано обозначение $R(t,s;\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n K_n(t,s)$

Интегральный оператор $\int_a^b R(t,s;\mu) f(s)\, ds$ наз. интегральной резольвентой исходного оператора $\int_a^b K(t,s)\, x(s)\, ds$, а ф-ция $R(t,s;\mu)$ наз. резольвентным ядром оператора A.

8.6 Интегральные уравнения с симметричными ядрами. Теорема Г-Ш для интегральных уравнений. Разложение решения интегрального уравнения по собственным функциям ядра.

До сих пор мы использовали терминологию теории операторов в гильбертовых пространствах. Сейчас познакомимся с аналогичной терминологией теории интегральных уравнений.

Теория операторов	Интегральные ур-ия
H – гильбертово пр-во $B: H \to H$ – лин. оператор	$A: L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ – оператор Гильберта-Шмидта с ядром $K(t,s)$
Опр. $x \in H$ наз. собственным вектором оператора B, если $x \neq 0$ и $Bx = \lambda x$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$ (которое наз. собственным значением оператора B)	① **Опр.** $x \in L_2[a,b]$ наз. собственной ф-цией ур-ия $x = \mu A x$ (или собственной ф-цией ядра K), если $x \neq 0$ и $x = \mu A x$ для некоторого $\mu \in \mathbb{C}$ (кот. наз. характеристическим значением ур-ия $x = \mu A x$ или хар. значением ядра K)

Другими словами: $\lambda \neq 0$ явл. собственным значением оператора A $\Leftrightarrow$ $\mu = 1/\lambda$ явл. характеристическим значением ур-ия $\mu = Ax$

(п. 7.13) **Теорема** (о точечном спектре самосопряженного огр. оператора): Если $B: H \to H$ – самосопр. огр. оператор, то все собств. числа B вещественны, а СВ, отв. разным СЗ ортогональны друг другу	② Если ядро K симметрично (т.е. $K(t,s) = \overline{K(s,t)}$), то все его хар. значения вещественны, а собственные функции, отвечающие разным хар. значениям, ортогональны друг другу
(п. 7.14) **Теорема** (о существовании базиса из СВ компактного самосопр. оператора): $\dim H \neq 0$ и $B: H \to H$ – комп. самосопр. оператор $\Rightarrow$ в H $\exists$ ОНБ из СВ оператора B	③ Аналогом т. п. 7.14 явл. теорема Гильберта-Шмидта для интегральных уравнений с симметричным ядром (см. ниже)
Следствие т. 7.14: СЗ компактного самосопр. оператора B можно перенумеровать (с учетом кратности) в порядке невозрастания модулей: $\lvert\lambda_1\rvert \geq \lvert\lambda_2\rvert \geq \ldots$	④ **Следствие** т. Г-Ш для интегральных ур-ий с симметричным ядром: хар. значения симм. ядра можно пронумеровать в порядке неубывания модулей: $\lvert\mu_1\rvert \leq \lvert\mu_2\rvert \leq \ldots$
В частности, каждому СЗ $\lambda \neq 0$ отвечает лишь конечное число лин. незав. СВ и $\forall\, \varepsilon > 0$ число СЗ, удовл. нер-ву $\lvert\lambda\rvert < \varepsilon$, конечно	В частности, хар. значению симм. ядра отвечает лишь конечное число лин. незав. собств. ф-ий ядра и $\forall\, \varepsilon > 0$ число хар. значений ядра, удовл. нер-ву $\lvert\mu\rvert < \varepsilon$, конечно

Опр. Говорят, что $x \in H$ лежит в образе оператора A, если $\exists y \in H: x = Ay$
Обозн: $x \in \operatorname{im} A$

(5) **Опр.** Говорят, что ф-ия $f \in L_2[a,b]$ представима через ядро $K(t,s)$, если $\exists g \in L_2[a,b]$ такая, что $f(t) = \int_a^b K(t,s) g(s)\, ds$, т.е. если $f \in \operatorname{im} A$

Теорема (3) (Г-Ш для инт. ур-ий с симметричным ядром):

Если $f \in L_2[a,b]$ представима через симметричное ядро $K \in L_2([a,b]\times[a,b])$, то она может быть разложена в ряд
$$f(t) = \sum_n f_n x_n(t),$$
где $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ - ортонормированная послед-ть собственных ф-ий ядра $K(t,s)$, а коэф-ты f_n задаются равенствами
$$f_n = \int_a^b f(t)\overline{x_n(t)}\, dt = (f, x_n)_{L_2[a,b]},$$
т.е. f_n - коэф. Фурье ф-ии f отн. ортонормир. системы $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

Замечание: Другими словами, в образе оператора A с ядром K существует ОНБ из СФ ядра $K(t,s)$ (т.е. такой базис существует в $\operatorname{im} A$, но не факт, что он существует в $L_2[a,b]$).

Док-во: Обозначим через $A: L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ оператор Г-Ш с ядром K. (← ядро означает)
Тогда A - компактный самосопр. оператор (см. п. 8.2). По т. п. 7.14 в $L_2[a,b]$ $\exists$ ОНБ $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ из СВ оператора A (т.е. $Ay_n = \lambda_n y_n$, $\lambda_n \in \mathbb{C}$)

Вычеркнем из послед-ти $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ вектор y_n, если $\lambda_n = 0$; и перенумеруем эту послед-ть заново: $x_1, x_2, \dots x_m, \dots$. Тогда:

1) возможно, послед-ть $x_1, x_2, \dots, x_m, \dots$ содержит лишь конечное число членов;

2) $\forall m$ x_m явл. СФ ядра K, отвечающей ХЗ $\mu_m = \frac{1}{\lambda_m}$:
$$Ax_m = \lambda_m x_m \iff x_m = \frac{1}{\lambda_m} Ax_m$$

3) послед-ть $x_1, x_2, \dots, x_m, \dots$ образует ОНБ в $\operatorname{im} A$:

$\forall x \in \operatorname{im} A$ $\exists$ $y \in L_2[a,b]$: $x = Ay$, а значит $x = Ay = A\left(\sum_{n=1}^{\infty} d_n y_n\right) =$ (это есть разложение $y \in L_2[a,b]$ по базису $y_1, \dots, y_n, \dots$ в $L_2[a,b]$)

$\overset{\text{лин. } A}{=} \sum_{n=1}^{\infty} d_n Ay_n = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \lambda_n y_n \overset{\text{не пишем слагаемые, у которых } \lambda_n = 0}{=} \sum_m f_m x_m \Rightarrow$ любой $x \in \operatorname{im} A$ раскладается по $x_1, \dots, x_m, \dots \Rightarrow$
(← ведь $Ay_n = \lambda_n y_n$ - СВ) (← какие-то коэф.)

$x_1, \dots x_m, \dots$ - базис в $\operatorname{im} A$

Осталось найти ф-лу для f_m в разложении $f = \sum_m f_m x_m$ (← x - переобозначили)

Умножим это рав-во скалярно на x_n и воспользуемся ортонормированностью (т.е. тем, что $(x_m, x_n) = \delta_{mn}$ - символ Кронекера)

$$(f, x_n) = \sum_m f_m (x_m, x_n) = \sum_m f_m \delta_{mn} = f_n \quad \text{ч.т.д.}$$

Применим доказанную теорему к решению неоднородного ур-ия $x = \mu Ax + f$, где A - инт. оператор Г-Ш с симм. ядром K. Пусть $x_1, \dots, x_n, \dots$ - ортонорм. послед-ть СФ ядра K и $x_n = \mu_n A x_n$.

Если x - решение ур-ия $x = \mu Ax + f$, то $x - f = \mu Ax$, а значит $x - f$ представима через ядро K и может быть разложена в ряд

$$x - f = \sum_n a_n x_n$$

Подставив это в ур-ие $x = \mu A x + f$, получим

$$f + \sum_n a_n x_n = x = \mu A x + f = \mu A\left(\sum_n a_n x_n + f\right) + f = \mu \sum_n a_n \underbrace{A x_n}_{\mu_n^{-1} x_n} + \mu A f + f =$$

$$= \mu \sum_n \mu_n^{-1} a_n x_n + \mu A f + f$$ или

$$\sum_n \left(a_n - \frac{\mu}{\mu_n} a_n\right) x_n = \mu \underbrace{Af}_{\text{эта ф-ия представима через ядро } K} = \mu \sum_n b_n x_n, \text{ где}$$

т.к. лежит в образе A

ядро симм., A самосопр.; т.к. СВ симм ядра $\in \mathbb{R}$

$$b_n = (Af, x_n) = (f, A x_n) = (f, \mu_n^{-1} x_n) = \mu_n^{-1} (f, x_n)$$

Значит, $a_n \left(1 - \frac{\mu}{\mu_n}\right) = \mu b_n = \frac{\mu}{\mu_n} (f, x_n)$

т.е. $a_n = \mu \frac{(f, x_n)}{\mu_n - \mu}$, а значит, $x - f = \sum_n a_n x_n \Rightarrow x = f + \mu \sum_n \frac{(f, x_n)}{\mu_n - \mu} x_n$

$$\Rightarrow x(t) = f(t) + \mu \sum_n \frac{x_n(t)}{\mu_n - \mu} \int_a^b f(s) \overline{x_n(s)}\, ds$$

это и есть искомое разложение решения инт. ур-ия по СФ ядра

8.7 Разложение повторного ядра интегрального уравнения по собственным функциям. Билинейная формула.

Дополним теорему Г-Ш для инт. ур-ий, доказанную в п. 8.6, более специальным утверждением.

Теорема (о разложении ядра, или билинейная формула)

Пусть $K \in L_2([a,b] \times [a,b])$ - симметричное ядро; $A: L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ - оператор Г-Ш с ядром K; $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ - ОНБ в $L_2[a,b]$, состоящий из СВ оператора A (так что $A x_n = \lambda_n x_n$). Тогда $\forall n \geq 1$ для повторного ядра $K_n(t,s)$ справедлива ф-ла:

$$K_n(t,s) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^n x_j(t) \overline{x_j(s)} \quad \text{- билинейная ф-ла}$$

Док-во: Из п. 8.2 (точнее, из I шага д-ва т. о компактности оператора Г-Ш) мы знаем, что послед-ть $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), \dots$ - ОНБ в $L_2[a,b]$, то система ф-ий $\{x_n(t) \overline{x_j(s)}\}_{n,j=1,2,\dots}$ явл. ОНБ в $L_2([a,b] \times [a,b])$.

Из п. 8.5 (точнее, из т. о повторном ядре оператора Г-Ш) мы знаем, что $K_n(t,s) \in L_2([a,b] \times [a,b])$.

Поэтому $K_n(t,s)$ разлагается по ОНБ $\{x_n(t) \overline{x_j(s)}\}_{n, j=1,2,\dots}$:

$$K_n(t,s) = \sum_{m,j=1}^{\infty} \underbrace{\left(K_n, x_m(t) \overline{x_j(s)}\right)}_{\text{коэф. Фурье}} x_m(t) \overline{x_j(s)} \qquad (*)$$

и нам остается только найти коэф. этого разложения (т.е. коэф. Фурье):

$$\left(K_n(t,s), x_m(t) \overline{x_j(s)}\right) = \int_a^b\!\!\int_a^b K_n(t,s) \overline{x_m(t) \overline{x_j(s)}}\, dt\, ds \overset{\text{двойной инт. в повторный}}{=}$$

$$= \int_a^b \left[\int_a^b K_n(t,s) x_j(s)\, ds\right] \overline{x_m(t)}\, dt = \int_a^b (A^n x_j)(t) \overline{x_m(t)}\, dt = (A^n x_j, x_m) =$$

$$= (A^{n-1}(A x_j), x_m) = \lambda_j (A^{n-1} x_j, x_m) = \dots = \lambda_j^n (x_j, x_m) = \lambda_j^n \delta_{jm}$$

Подставив это выражение в $(*)$, получим

$$K(t,s) = \sum_{m,j=1}^{\infty} \lambda_j^n \delta_{jm} x_m(t) \overline{x_j(s)} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^n x_j(t) \overline{x_j(s)} \quad \text{ч.т.д.}$$

Замечание. Очевидно, в билинейной ф-ле достаточно вести суммирование только по тем номерам j, для которых $\lambda_j \neq 0$.

Но тогда x_j будут СФ ядра K и $\lambda_j = \frac{1}{\mu_j}$, где μ_j – хар. значение ядра (т.е. $x_j = \mu_j A x_j$).

Поэтому билинейную ф-лу можно записать и так:

$$K_n(t,s) = \sum_j \frac{x_j(t)\overline{x_j(s)}}{\mu_j^n},$$ где $x_1, \dots, x_n, \dots$ – максимальная ортонормир. послед-ть СФ ядра $K(t,s)$, и $x_j(t) = \mu_j A x_j(t)$

Мы доказали билинейную ф-лу как равенство двух ф-ий в $L_2([a,b]\times[a,b])$. А можно ли утверждать, что правая и левая части билинейной ф-лы равны поточечно? На этот вопрос отвечает следующая теорема:

Теорема (Мерсера) (б/д):

Если ядро $K: [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{C}$ непрерывно, симм. и все его ХЗ (за искл. м.б. конечного их числа) имеют одинаковый знак, то все СФ x_j ядра K непрерывны и справедлива билинейная ф-ла

$$K(t,s) = \sum_j \frac{x_j \cdot \overline{x_j(s)}}{\mu_j},$$

причем последний ряд сходится абсолютно и равномерно.