$P_n(x)$

Задача 4

Вычислить интеграл

$$I_n = \int_{-1}^{1} x\, P_n(x) P_{n+1}(x)\, dx$$

Пауза

~~Реш~~ Ответ $I_n = \dfrac{2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}$

Решение задачи 4

Из трехчленной рекуррентной формулы 1) получаем выражение

$$x P_n(x) = \frac{(n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)}{2n+1}$$

Подставим это в интеграл

$$I_n = \int_{-1}^{1}\left[\frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1}P_{n-1}(x)\right]P_{n+1}(x)\,dx =$$

$= \langle$ по свойству ортогональности 8)$\rangle =$

$$= \frac{n+1}{2n+1}\int_{-1}^{1}P_{n+1}^2(x)\,dx = \frac{n+1}{2n+1}\,\frac{2}{2(n+1)+1} =$$

$$= \frac{2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}.$$

Задача 5

Вычислить интеграл

$$I_n = \int_{-1}^{1} x^2 P_n(x) P_{n+1}(x)\,dx$$

Пауза для решения самостоятельно

Решение задачи 5.

$$I_n = \int_{-1}^{1}(xP_n(x))(xP_{n+1}(x))\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left[\frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1}P_{n-1}(x)\right]\left[\frac{n+2}{2n+3}P_{n+2}(x) + \frac{n+1}{2n+3}P_n(x)\right]dx =$$

$= 0$ из свойства ортогональности

Короткое решение задачи 5.

Так как, из свойства чётности ~~$P_n(-x) = (-$~~

$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$, то функция

$x^2 P_n(x) P_{n+1}(x)$ является нечётной,

поэтому $I_n = 0$.

Задача 6.

Пользуясь тождествами 3), 4), получить тождество Наньюндиа для определителей

$$(1-x^2)\begin{vmatrix} P_n'(x) & P_{n+1}'(x) \\ P_{n-1}'(x) & P_n'(x) \end{vmatrix} = n(n+1)\begin{vmatrix} P_n(x) & P_{n+1}(x) \\ P_{n-1}(x) & P_n(x) \end{vmatrix}$$

Подсказка

Представить $(1-x^2)$ в виде определителя

$$(1-x^2) = \begin{vmatrix} x & -1 \\ 1 & -x \end{vmatrix}$$

и вспомнить, что

опрелитель произведения матриц равен произведению их определителей.

Пауза

Решение задачи 6.

$$\begin{vmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} P_n' & P_{n+1}' \\ P_{n-1}' & P_n' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} xP_n' - P_{n-1}' & xP_{n+1}' - P_n' \\ P_n' - xP_{n-1}' & P_{n+1}' - xP_n' \end{vmatrix}$$

$= \langle$применим тождества 3) и 4)$\rangle =$

$$= \begin{vmatrix} nP_n & (n+1)P_{n+1} \\ nP_{n-1} & (n+1)P_n \end{vmatrix} = n(n+1) \begin{vmatrix} P_n & P_{n+1} \\ P_{n-1} & P_n \end{vmatrix}$$