

Задача 5: $Ax = (x_1 + x_3, x_2 + x_3, x_3, x_4, \dots)$ линейность и корень.

Пауза!

Решение: $\|A\| = \sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Линейность: очевидна.

Норма: $\|Ax\|^2 = (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + \dots + x_n^2 + \dots$

это квадр. форма (матрицей $\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 2 & & & \end{array} \right) \end{matrix}$), т.е. она

"почти" приведена к главным осям за исключением блока

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения этой симметрической

матрицы это корни $\det \begin{pmatrix} 1-t & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & 1 \\ 1 & 1 & 2-t \end{pmatrix}$ и они

равны $\frac{1}{2}(2+\sqrt{3}), 1, 2-\sqrt{3}$

Таким образом в главных осях $\|Ay\|^2 = (2+\sqrt{3})y_1^2 + y_2^2 + (2-\sqrt{3})y_3^2 + \dots + y_4^2 + y_5^2 + \dots \leq (2+\sqrt{3})(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + \dots)$

и тогда при $\|y\|=1$ $\|Ay\|^2 \leq 2+\sqrt{3}$, более того,

равенство достигается на векторе $(1, 0, 0, \dots)$ (это

собственный в главных осях, а не исходные), так что

при $\|y\|=1$ $\|Ay\|^2 = 2+\sqrt{3} \Rightarrow \|A\| = \sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Задача 7: $(Ax)(t) = t^\alpha \int_0^1 x(s) ds.$

Найти!

Решение: $\|A\| = \sqrt{\frac{1}{2\alpha+1}}$

линейность: $(A(ax+by))(t) = t^\alpha \int_0^1 (ax+by)(s) ds =$
 $= t^\alpha \left(a \int_0^1 x(s) ds + b \int_0^1 y(s) ds \right) = a \cdot t^\alpha \int_0^1 x(s) ds + b \cdot t^\alpha \int_0^1 y(s) ds$
 $= a(Ax)(t) + b(Ay)(t), \forall t \in [0,1], \text{ так что}$

$A(ax+by) = a(Ax) + b(Ay), A - \text{линейн.}$

Норма: $\|Ax\|^2 = \int_0^1 \left(t^\alpha \int_0^1 x(s) ds \right)^2 dt = \left(\int_0^1 t^{2\alpha} dt \right) \cdot \left(\int_0^1 x(s) ds \right)^2 =$
 $= \frac{1}{2\alpha+1} \cdot \left(\int_0^1 1 \cdot x(s) ds \right)^2 \underset{\text{НКБ}}{\leq} \frac{1}{2\alpha+1} \cdot \left(\int_0^1 1^2 ds \right) \cdot \left(\int_0^1 x^2(s) ds \right) =$

$= \frac{1}{2\alpha+1} \|x\|^2$, причем рав-во достигается для x -пропорционального

норм. ф-ции 1, т.е. для ~~$x(s) \equiv 1$~~ $\|x\|^2 = 1$ $\|Ax\|^2 \leq \frac{1}{2\alpha+1}$

и, наоборот $x(s) \equiv 1$ получаем равенство $\|Ax\|^2 = \frac{1}{2\alpha+1}$,

$\int_0^1 x^2(s) ds = 1.$

так что $\|A\| = \sqrt{\frac{1}{2\alpha+1}}.$

Задача 8: $(Ax)(t) = a(t)x(t)$, где $a: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ — функ.
 непрерыв. функ.

Найти!

Решение: $\|A\| = \max_{t \in [0, 1]} |a(t)|$.

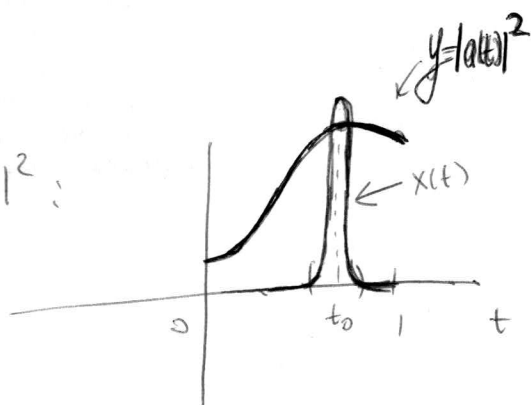
Линейность: очевидна.

Норма: $\|Ax\|^2 = \int_0^1 a(t)x(t) \cdot \overline{a(t)x(t)} dt = \int_0^1 |a(t)|^2 |x(t)|^2 dt \leq$
 $\leq \max_{t \in [0, 1]} |a(t)|^2 \cdot \int_0^1 |x(t)|^2 dt$, более того при $\|x\|^2 = \int_0^1 |x(t)|^2 dt = 1$

Получаем $\|Ax\|^2 \leq \max_{t \in [0, 1]} |a(t)|^2 = |a(t_0)|^2$ где $\text{kerot. } t_0$.

$$\|A\|^2 \leq \max_{t \in [0, 1]} |a(t)|^2$$

Более того, $\sup_{\|x\|=1} \|Ax\|^2 = \max_{t \in [0, 1]} |a(t)|^2$:



Выберем послед-во $x_n(t) \in L_2[0, 1]$

с $\|x_n\| = 1$ и $\text{supp } x_n(t) \subset (t_0 - \frac{1}{n}, t_0 + \frac{1}{n})$ ("δ-функция" последовательность).

Тогда $\|Ax_n\|^2 = \int_{t_0 - \frac{1}{n}}^{t_0 + \frac{1}{n}} |a(t)|^2 |x_n(t)|^2 dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |a(t_0)|^2 = \max_{t \in [0, 1]} |a(t)|^2$

$\Rightarrow \|A\| = \max_{t \in [0, 1]} |a(t)|$