

Основа функционального анализа. ФФ, II курс
№ семинар: Сопряжённый оператор. Селектор и
резольвента ограниченного оператора.

По плану этот семинар проходит с 13 по 18 апреля

Опр: Пусть H и H_1 - гильбертовы пространства
и $A: H \rightarrow H_1$ - линейный ограниченный оператор.
Оператор $A^*: H_1 \rightarrow H$ такой, что $\forall x \in H$ и
 $\forall y \in H_1$ выполняется равенство $(Ax, y)_{H_1} = (x, A^*y)_H$
называется сопряжённым к A оператором.

Замечание Сопряжённый оператор
существует и единственен.

Задача 1: Найти сопряжённый к тождествен-
ному оператору $I: H \rightarrow H$. $(x, I^*y)_H$

Решение: $\forall x, y \in H$ имеем $(Ix, y)_H =$
 $= (x, y)_H = (x, Iy)_H$. (*)

Используем лемму-лемму: Если
 $x, y \in H$ таковы, что $\forall z \in H (x, z) = (y, z)$,
то $x = y$.

Из (*) следует, что вектор Iy и I^*y
в H таковы, что $\forall x \in H$ имеем
 $(Iy, x) = \overline{(x, Iy)} \stackrel{(*)}{=} \overline{(x, I^*y)} = (I^*y, x)$.

По лемме-лемме получаем, что
 $I^*y = Iy$. $\forall y \in H$. Но если два
оператора $(I$ и $I^*)$ одинаково

действуют на любой вектор $y \in H$, то
они равны (т.е. $I^* = I$).

Ответ: $I^* = I$, т.е. сопряжённым к
тождественному оператору является он
сам.

Задача 2: Найти сопряжённый к
нулевому оператору $O: H \rightarrow H_1$

Поставьте видео на паузу и,
предварив или продолжив просмотр,
попробуйте решить задачу 2 само-
стоятельно!

Ответ к задаче 2: $O^* = O: H_1 \rightarrow H$.

Решение задачи 2: $\forall x \in H \forall y \in H_1$

$(x, O^*y)_H \stackrel{\text{опр}}{=} (Ox, y)_{H_1} = (O, y)_{H_1} = 0 =$
 $= (x, 0)_H = (x, Oy)_H$. По линейности
 $O^*y = Oy \quad \forall y \in H_1$. Значит, $O^* = O$.

Задача 3: Пусть H - гильбертово пространство,
 S - замкнутое подпространство в H , $P: H \rightarrow S$ - опера-
тор ортогонального проектирования на S .
Найдите P^* .

Поставьте видео на паузу и
попробуйте решить задачу 3 самостоятельно.
Затем продолжайте просмотр видео

48 Ответ к задаче 3: $\Gamma - \Gamma$.

49 Решение задачи 3: Поскольку S -замкну-
то, то $\forall x \in H \exists! x_1 \in S$ и $\exists! x_2 \in S^\perp$
такие, что $x = x_1 + x_2$ (т.е. $H = S \oplus S^\perp$).

52 Т.е. это, по определению, $Px = x_1$.

53 Пусть ещё $y \in H$ - произвольный вектор
и $y = y_1 + y_2$, где $y_1 \in S$, $y_2 \in S^\perp$. Тогда

54
55 $(x, P^*y) \stackrel{\text{опр}}{=} (Px, y) = (x_1, y_1 + y_2) =$
56 $= (x_1, y_1) + \underbrace{(x_1, y_2)}_{=0} = (x_1, y_1) = \underbrace{(x_1, y_1)}_{\substack{\uparrow \\ S}} + \underbrace{(x_2, y_1)}_{\substack{\uparrow \\ S^\perp}} =$

57 $= (x_1 + x_2, y_1) = (x, Py)$. Значит, по

58 линейности $P^*y = Py \quad \forall y$, т.е. $P^* = P$.

59 Задача 4: Пусть оператор $A: L_2[0,1] \rightarrow L_2[0,1]$
60 сопоставляет функции $x \in L_2[0,1]$ функцию
61 Ax из $L_2[0,1]$ по формуле

62 $(Ax)(t) = tx(t).$

63 Найдите A^* .

64 | Поставьте видео на паузу и
65 | попробуйте решить задачу 4
66 | самостоятельно. Только после
67 | этого продолжайте просмотр видео.

68 Ответ к задаче 4: $A^* = A$.

69 Решение задания 4: $\forall x, y \in L_2[0, 1]$

70 нужно: $(x, A^*y) \stackrel{\text{оп}}{=} (Ax, y) =$

71 $= \int_0^1 (Ax)(t) \overline{y(t)} dt = \int_0^1 t x(t) \overline{y(t)} dt =$

72 $= \int_0^1 x(t) \overline{ty(t)} dt = \int_0^1 x(t) \overline{(Ay)(t)} dt =$

73 $= (x, Ay)$. Значит, но линейно-линейно,

74 $A^*y = Ay \quad \forall y$, т.е. $A^* = A$.

75 Задание 5 Пусть оператор $A_{t_0}: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$

76 сопоставляет функции $x(t) \in L_2(\mathbb{R})$ новой

77 функцию $A_{t_0}x$ из $L_2(\mathbb{R})$ по формуле

78 $(A_{t_0}x)(t) = x(t + t_0),$

79 где t_0 — некоторое фиксированное

80 вещественное число. Найдите $A_{t_0}^*$.

81 Поставьте везде не науду и

82 решение задачи 5 самостоятельно.

83 Ответ к задаче 5: $A_{t_0}^* = A_{-t_0}$.

84 Решение задачи 5: $\forall x, y \in L_2(\mathbb{R})$

85 нужно $(x, A_{t_0}^*y) \stackrel{\text{оп}}{=} (A_{t_0}x, y) =$

86 $= \int_{-\infty}^{+\infty} (A_{t_0}x)(t) \overline{y(t)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+t_0) \overline{y(t)} dt =$

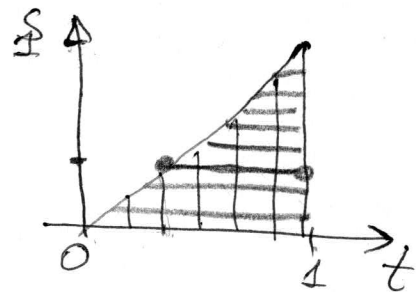
87 $= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \overline{y(\tau - t_0)} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \overline{(A_{-t_0}y)(\tau)} d\tau =$

88 $= (x, A_{-t_0}y) \Rightarrow A_{t_0}^*y = A_{-t_0}y \quad \forall y \Rightarrow A_{t_0}^* = A_{-t_0}$

89 Задача 6: Пусть оператор $A: L_2[0,1] \rightarrow L_2[0,1]$
 90 составлен по-ум $x \in L_2[0,1]$ по-ум Ax в
 91 $L_2[0,1]$ по-ум
 92 $(Ax)(t) = \int_0^t x(s) ds$
 93 Найти A^* .

94 | Пусть же с помощью
 95 | решения
 96 Отоб и задача 6: $(A^*y)(s) = \int_s^1 y(t) dt$.
 97 Решение задачи 6: $\forall x, y \in L_2[0,1]$ имеем
 98 $(x, A^*y) \stackrel{\text{оп}}{=} (Ax, y) = \int_0^1 (Ax)(t) \overline{y(t)} dt =$
 99 $= \int_0^1 \left[\int_0^t x(s) ds \right] \overline{y(t)} dt =$
 100 $= \int_0^1 \left[\int_s^1 \overline{y(t)} dt \right] x(s) ds = \int_0^1 x(s) \overline{(By)(s)} ds =$
 101 $= (x, By)$. То есть-имеем, $A^*y = By$
 102 $\forall y$. Значит $A^* = B$.

103 Задача 7 Пусть оператор $A: l_2 \rightarrow l_2$
 104 составлен по-ум $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$
 105 в l_2 по-ум Ax в l_2 по-ум
 106 $Ax = (0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$.
 107 Найти A^* .
 108 | Пусть же с помощью, решение



109 Утверждение 7: $A''(y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) = (y_2, y_3, \dots, y_n, \dots)$
 110 Решение задания 7: $\forall x, y \in l_2$ имеем
 111 $(x, A^*y) \stackrel{\text{оп}}{=} (Ax, y) = (0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$
 112 $= \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_{k+1}} = ((x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), (y_2, y_3, \dots, y_n, \dots)) =$
 113 $= \cancel{(x, By)}$, где $B(y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) = (y_2, y_3, \dots, y_n, \dots)$
 114 Поэтому, $A^*y = By \quad \forall y$, а значит,
 115 $A^* = B$.

116 Задание 8 Пусть оператор $B: l_2 \rightarrow l_2$
 117 задан формулой $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ и l_2
 118 новым образом Bx и l_2 по q -се
 119 $Bx = (x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$
 120 Найти B^* .

121 | Найдем с помощью нового предела
 122 Утверждение 8: $B^*(y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) = (0, y_1, y_2, \dots)$
 123 Решение задания 8: $\forall x, y \in l_2$ имеем
 124 $(x, B^*y) \stackrel{\text{оп}}{=} (Bx, y) = ((x_2, x_3, \dots, x_n, \dots), (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots))$
 125 $= \sum_{k=1}^{\infty} x_{k+1} \overline{y_k} = ((x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots), (0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots))$
 126 $= (x, Ay)$, где $A(y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) = (0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$.
 127 Поэтому, $B^*y = Ay \quad \forall y \in l_2$,
 128 а значит, $B^* = A$.