

129 Пусть H -матричное у-во над $\mathbb{C}$ и $A: H \rightarrow H$ -
130 линейный ограниченный оператор. Тогда:
131 Дип 1 Если $A - \lambda I$ не обратим (т.е. если
132 $\exists x \neq 0 : (A - \lambda I)x = 0$), то $\lambda \in \sigma_p(A)$ -то точный
133 спектр оператора A .

134 Дип 2. Если $(A - \lambda I)^{-1}$ существует и
135 $\text{dom } (A - \lambda I)^{-1} = H$, то $\lambda \in \rho(A)$ -регулярный
136 к оператору A .

137 Дип 3. Если $(A - \lambda I)^{-1}$ существует и
138 $\text{dom } (A - \lambda I)^{-1} \neq H$, но $\text{cl}[\text{dom } (A - \lambda I)^{-1}] = H$,
139 то $\lambda \in \sigma_c(A)$ -неуправляемый спектр оператора A .

140 Дип 4 Если $(A - \lambda I)^{-1}$ существует и
141 $\text{cl}[\text{dom } (A - \lambda I)^{-1}] \neq H$, то $\lambda \in \sigma_r(A)$ -
142 остаточный спектр.

143 Дип 5 $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ - спектр опер A .

144 Свойства спектра

- 145 (1) $\sigma = \sigma_p \cup \sigma_c \cup \sigma_r$; $\sigma_p \cap \sigma_c = \sigma_c \cap \sigma_r = \sigma_r \cap \sigma_p = \emptyset$.
146 (2) $\sigma(A) \subset \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|A\| \}$.
147 (3) $\sigma(A)$ - замкнутое мн-во.

148 Задача 9: Доказать, что если $\dim H < +\infty$,
149 то для любого линейного неуправляемого
150 отображения $A: H \rightarrow H$ имеем

151
$$\sigma_c(A) = \sigma_r(A) = \emptyset.$$

152 Решение задачи 9: Пусть $x_1, \dots, x_n$ — ортонорми-
 153 рованная у-ва H . В этом (оронормированном)
 154 базисе линейному линейному оператору в H
 155 соответствует матрица и наоборот, линейному
 156 матрице соответствует линейный оператор,
 157 определенный во всем у-ве H .
 158 Поэтому ситуация, когда оператор $A - \lambda I$
 159 обратим, то $(A - \lambda I)^{-1}$ определен и во
 160 всем H , невозможна. Значит, $\sigma_c = \sigma_r = \emptyset$
 161 как и было в линейном случае.

162 Задача 10 Найти спектр и все левые
 163 нулевые операторы $O: H \rightarrow H$.
 164 Решение задачи 10: Имеем линейные
 165 спектр: $Ox = \lambda x \Leftrightarrow \lambda x = 0$. Рассмотрим
 166 два случая: 1) $\lambda = 0$ и 2) $\lambda \neq 0$.

167 ① $\lambda = 0 \Rightarrow x$ — любой, в том числе,
 168 можно взять $x \neq 0$, так, что справедливо
 169 $Ox = 0x$, $x \neq 0$, будет выполняться. Значит,
 оператор число $\lambda = 0$ число $\lambda = 0$ входит в σ_r .

171 ② $\lambda \neq 0 \Rightarrow x = 0$. Значит, при любом
 172 $\lambda \neq 0$ ур-ние $Ox = \lambda x$ имеет только нулевое
 173 решение. Следовательно, любое число $\lambda \neq 0$
 174 не входит в σ_r . Следовательно: $\sigma_r = \{0\}$.

175 Имеем уже знаем, что $\forall \lambda \neq 0$
 176 оператор $O - \lambda I$ обратим. Найдем его
 177 обратный и укажем его область опреде-
 178 ления:

$$(0 - \lambda I)x = y \Leftrightarrow -\lambda x = y \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\lambda}y \Leftrightarrow x = (0 - \lambda I)^{-1}y.$$

Следовательно, оператор $(0 - \lambda I)^{-1}$ задается формулой $(0 - \lambda I)^{-1}y = -\frac{1}{\lambda}y$. Эта формула определена во всем H потому, что $\forall y \in H$ вектор $-\frac{1}{\lambda}y$ снова лежит в H . Выводит, $\forall \lambda \neq 0 \quad \text{dom}[(0 - \lambda I)^{-1}] = H$. Значит, любое число $\lambda \neq 0$ лежит в $\rho(0)$. Выводит, $\sigma(0) = \mathbb{C} \setminus \rho = \{0\} = \sigma_p(0)$.

Следовательно, $\sigma_c = \sigma_r = \emptyset$.

Ответ: $\sigma = \sigma_p = \{0\}$; $\sigma_c = \sigma_r = \emptyset$; $\rho = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \neq 0\}$.

Задача 11: Пусть H — произвольное конечномерное пространство. Рассмотрим линейный оператор $I: H \rightarrow H$, определенный как $Ix = x$ для любого $x \in H$. Сформулируйте задачу в пространстве $\mathbb{R}^n$ и решите задачу самостоятельно.

Ответ к задаче 11: $\sigma = \sigma_p = \{1\}$; $\sigma_c = \sigma_r = \emptyset$; $\rho = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \neq 1\}$.

Решение задачи 11: $(I - \lambda I)x = 0$ имеет

только тривиальное решение: $Ix = \lambda x \Leftrightarrow x = \lambda x \Leftrightarrow (1 - \lambda)x = 0$. Рассмотрим два случая:

- 1) $1 - \lambda = 0$, тогда x — любой в том числе и ненулевой вектор $\Rightarrow \lambda = 1$ лежит в σ_p ;
- 2) $1 - \lambda \neq 0$, тогда x обязательно равен 0

202 II шаг Теперь уже ясно, что если $\lambda \neq 1$,
 203 то оператор $(I - \lambda I)$ обратим. Найдем тот
 204 обратный и узнаем его область определения:
 205 $(I - \lambda I)x = y \Leftrightarrow (1 - \lambda)x = y \Leftrightarrow x = \frac{1}{1 - \lambda} y \Leftrightarrow$

206 $x = (I - \lambda I)^{-1} y$.
 207 Значит оператор $(I - \lambda I)^{-1}$ определен
 208 во всем H (если $\lambda \neq 1$). Следовательно,
 209 любое число $\lambda \neq 1$ входит в резольвенту
 210 оператора. Значит, $\sigma = \mathbb{C} \setminus \sigma = \{1\}$.
 211 Поскольку $\sigma_p = \{1\}$, ~~и~~ не известные нам части
 212 спектра σ_c и σ_r входят в σ , но не пересекаются с
 213 σ_p , то $\sigma_c = \sigma_r = \emptyset$.

214 Задача 12 Пусть H - гильбертово
 215 и неевклидово пространство. Найдите
 216 спектр оператора $P: H \rightarrow S$ ортогонального
 217 проектора на S .

218 | Сделайте паузу в просмотре видео
 219 и решите задачу самостоятельно.
 220 | После просмотра продолжите просмотр.

221 Ответ к задаче 12: $\sigma_p = \sigma = \{0, 1\}$; $\sigma_c = \sigma_r = \emptyset$.

222 Решение задачи 12: II шаг Найдём тот самый
 223 спектр оператора $P: H \rightarrow S$.

224 $(P - \lambda I)x = 0 \Leftrightarrow x_1 - \lambda(x_1 + x_2) = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)x_1 = \lambda x_2$. (*)
 225 Здав x представим в виде $x = x_1 + x_2$, где
 226 $x_1 \in S$, $x_2 \in S^\perp$ и $Px = x_1$.

227 Рассуждения два случая для проектора (*):

228 1) $\lambda = 1$. Тогда $0 = \lambda x_2$, значит $x_2 = 0$.

229 Но x_1 может быть любым, в том числе
230 и не равным нулю. Значит, $1 \in \sigma_P$.

231 2) $\lambda = 0$. Тогда $(1-\lambda)x_1 = 0$, а значит $x_1 = 0$.

232 Но при этом x_2 может быть любым, в том
233 числе и не равным нулю. Значит $0 \in \sigma_P$.

234 Следовательно, $\sigma_P = \{0, 1\}$.

235 II шаг Теперь уже знаем, что если
236 $\lambda \neq 0$ и $\lambda \neq 1$, то оператор $(P - \lambda I)$ обратим.
237 Найдем этот обратный и выведем из
238 условия определения:

239 $(P - \lambda I)x = y \Leftrightarrow x_1 - \lambda(x_1 + x_2) = y_1 + y_2 \Leftrightarrow$
240 $\Leftrightarrow \underbrace{(1-\lambda)x_1}_{\pi_S} - y_1 = \underbrace{\lambda x_2 + y_2}_{\pi_{S^\perp}} \Rightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x_1 = y_1 \\ -\lambda x_2 = y_2 \end{cases}$

241 $\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{1-\lambda} y_1 \\ x_2 = -\frac{1}{\lambda} y_2 \end{cases} \quad (**)$
242

243 Поскольку сейчас $\lambda \neq 0$ и $\lambda \neq 1$, то
244 любой вектор $y = y_1 + y_2 \in H$ можно
245 по разложению (***) выразить x_1 и x_2 ,
246 а значит и $x = x_1 + x_2 \in H$.

247 Значит, оператор $(P - \lambda I)^{-1}$, определяемый
248 с помощью разложения (**), задан на
249 всем H . Т.е. ~~к~~ любое число $\lambda \neq 0$ и $\lambda \neq 1$,
250 является в $\rho(P)$.

251 Значит, $\sigma_c(P) = \sigma_r(P) = \emptyset$.