

1 Основы функционального анализа. ФФ, II курс
2 1й семестр: Спектр и резольвента ограни-
3 ченного оператора. Применение сопря-
4 жённого оператора к нахождению спектра
5 (По плану 1-й семестр проходит с 20 по 25
6 апреля 2020 г.)

7 Пусть H -гильбертово пространство над $\mathbb{C}$,
8 $A: H \rightarrow H$ -ограниченный линейный оператор
9 и $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда классическое след. определено:
10 1) $\nexists (A - \lambda I)^{-1} \Rightarrow \lambda \in \sigma_p(A)$ - точечный спектр
Оператора A .
11 2) $\exists (A - \lambda I)^{-1}$ и $\text{dom } (A - \lambda I)^{-1} = H \Rightarrow \lambda \in \sigma_s(A)$ -
12 резольвентное спек-во оператора A ;
13 $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma_s(A)$ - спектр опер. A .
14 3) $\exists (A - \lambda I)^{-1}$ и $\text{dom } (A - \lambda I)^{-1} \neq H$, но
15 $\text{cl}[\text{dom } (A - \lambda I)^{-1}] = H \Rightarrow$
16 $\lambda \in \sigma_c(A)$ - непрерывный спектр.
17 4) $\exists (A - \lambda I)^{-1}$ и $\text{cl}[\text{dom } (A - \lambda I)^{-1}] \neq H \Rightarrow$
18 $\lambda \in \sigma_r(A)$ - остаточный спектр

19 Свойства спектра:

- 20 1). $\sigma = \sigma_p \cup \sigma_c \cup \sigma_r$; $\sigma_p \cap \sigma_c = \sigma_c \cap \sigma_r = \sigma_r \cap \sigma_p = \emptyset$.
21 2) $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|A\|\}$.
22 3). $\sigma(A)$ - замкнутое мн-во в $\mathbb{C}$.

23 Теорема (о применении сопряженного

24 оператора к нормированному спектру).

25 Пусть H - гильбертово пространство и

26 $A: H \rightarrow H$ - ограниченный линейный

27 оператор. Пусть еще $\lambda \in \mathbb{C}$ таково, что

28 $\lambda \notin \sigma_p(A)$. Тогда следующие утверждения

29 эквивалентны:

- 30 (1) $\lambda \in \sigma_r(A)$;
- 31 (2) $\overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$.

32 Задача 1. Вписать спектр оператора

33 умножения на независимую переменную

34 в пространстве $L_2[0,1]$, т.е. оператору

35 $A: L_2[0,1] \rightarrow L_2[0,1]$, заданного формулой

36 $(Ax)(t) = tx(t)$ для произвольной функции

37 $x \in L_2[0,1]$ и любого $t \in [0,1]$.

38 Решение (в котором не используется

39 теорема о применении сопряженного

40 оператора к нормированному спектру).

41 Проверим, что A линейен: если $x, y \in L_2[0,1]$

42 и $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, то $(A(\alpha x + \beta y))(t) =$

43 $= t(\alpha x(t) + \beta y(t)) = \alpha tx(t) + \beta ty(t) =$

44 $= \alpha (Ax)(t) + \beta (Ay)(t)$, т.е.

45 $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$, т.е. A - линейен

46 Убедимся, что A ограниченный оператор.
 47 Для этого найдем его норму: $\forall x \in L_2[0,1]$
 48 имеем $\|Ax\|^2 = \int_0^1 |(Ax)(t)|^2 dt = \int_0^1 t^2 |x^2(t)| dt \leq$
 49 $\leq \int_0^1 |x^2(t)| dt = \|x\|^2$. Значит,

50
$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1 < +\infty.$$

51 Мы не нашли норму оператора A , а лишь
 52 оценили её сверху. Но всегда уже следует, что
 53 A — ограниченный оператор и мы можем
 54 использовать известное в начале этого
 55 семинара определение спектра

56 I шаг Ищем тогда спектр оператора A ,
 57 т.е. ищем такие $\lambda \in \mathbb{C}$, что уравнение $(A - \lambda I)x = 0$
 58 имеет ненулевое решение $x \in L_2[0,1]$, т.е.
 59 ищем при каких λ ур-ние $t x(t) - \lambda x(t) = 0$
 60 имеет ненулевое решение. Из этого ур-ния находим,
 61 что
$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [0,1] \text{ и } t \neq \lambda; \\ \text{любое число,} & \text{если } t = \lambda. \end{cases}$$

63 Отсюда видим, что при любом комплексном
 64 λ функция $x(t)$, являющаяся решением
 65 уравнения $(t - \lambda)x(t) = 0$, обращается в
 66 нуль, тождественно равна нулю,
 67 ~~и~~ ~~какое~~ ~~было~~ в одной точке $t = \lambda$.

68 Поскольку среди ортогонального спектра
 69 равно 0, то $x(t)$ считается нулевым

70 функции в пространстве $L_2[0, 1]$. Следовательно -

71. Кольцо, $\sigma_p(A) = \emptyset$.

72. (II шаг) Теперь уже известно, что $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

73 оператор $A - \lambda I$ обратим. Найдём отсюда обратный

74 и узнаем его область определения:

75 $(A - \lambda I)x = y \Leftrightarrow (t - \lambda)x(t) = y(t) \Leftrightarrow x(t) = \frac{y(t)}{t - \lambda} \Leftrightarrow$

76. $\Leftrightarrow x = (A - \lambda I)^{-1}y$.

77. Найдём $\text{dom}[(A - \lambda I)^{-1}]$ по известной нам

78 совокупности тех $y \in L_2[0, 1]$, для которых

79 функция $x(t) = \frac{y(t)}{t - \lambda}$ задаёт функцию,

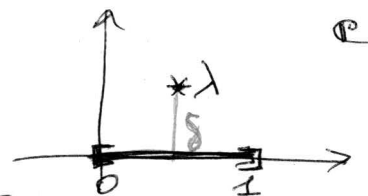
80 лежащую в $L_2[0, 1]$. Подчёркнём в этом

81 рассуждении два момента.

82. (1-й момент) $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, 1]$

83 Очевидно, $\exists \delta > 0 : \forall t \in [0, 1]$

84 выполняются условия $|t - \lambda| \geq \delta$.



85 Поэтому $\|x\|_{L_2[0, 1]}^2 = \int_0^1 |x(t)|^2 dt = \int_0^1 \frac{|y(t)|^2}{|t - \lambda|^2} dt \leq$

86 $\leq \frac{1}{\delta^2} \int_0^1 |y(t)|^2 dt = \frac{1}{\delta^2} \|y\|_{L_2[0, 1]}^2 < +\infty$.

87 Т.е. в этом случае $\forall y \in L_2[0, 1]$

88 функция $x(t) = \frac{y(t)}{t - \lambda}$ даёт θ -ую $y \in L_2[0, 1]$.

89 Известно, в этом случае оператор $(A - \lambda I)^{-1}$

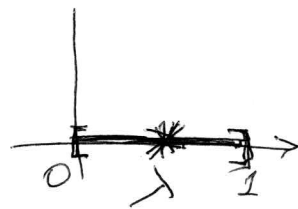
90 определён на всём $L_2[0, 1]$, т.е.

91 любое число $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, 1]$ содержится

92 в ~~в~~ разрешимости спектра оператора A ,

93 т.е. $\sigma(A) \subset [0, 1]$.

94 2-й случай $\lambda \in [0, 1]$.



95 Убедимся, что в этом случае
96 оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ не определен
97 на функции $y(t) \equiv 1 \quad \forall t \in [0, 1]$, т.е.
98 что в этом случае функции

99
$$x(t) = \frac{y(t)}{t - \lambda} = \frac{1}{t - \lambda}$$

100 не лежит в $L_2[0, 1]$. В самом деле:

101
$$\|x\|_{L_2[0, 1]}^2 = \int_0^1 \frac{dt}{(t - \lambda)^2} = \infty,$$

102 поскольку интеграл $\int_0^1 \frac{dt}{(t - \lambda)^2}$ расходитс в
103 окрестности точки $t = \lambda$. Чтобы убедиться в
104 этом, сделаем замену $t - \lambda = s$. Тогда

105
$$\int_{\lambda}^1 \frac{dt}{(t - \lambda)^2} = \int_0^1 \frac{ds}{s^2} = -\frac{1}{s} \Big|_0^1 = +\infty.$$

106 Значит, $\forall \lambda \in [0, 1] \quad \text{dom } (A - \lambda I)^{-1} \neq X^{L_2[0, 1]}$
107 и все такие λ лежат в спектре A .

108 Следовательно, с учетом точки 93,
109 получаем $\sigma(A) = [0, 1]$.

110 С учетом точки 20 видно, что
111 $\forall \lambda \in [0, 1]$ есть ненулевое $\lambda \in \sigma_c(A)$,
112 либо $\lambda \in \sigma_r(A)$. Нам осталось показать
113 о какой ситуации идет речь.

114 Пусть $\lambda \in [0, 1]$. Введем в рассмотрение
 115 линейное пространство $\Omega_\lambda = \{y \in L_2[0, 1] \mid \exists \delta > 0 : \forall t \in [0, 1] : |t - \lambda| < \delta \Rightarrow y(t) = 0\}$
 116



117 Наме требуется проверить следующие свойства
 118 линейного пространства Ω_λ :

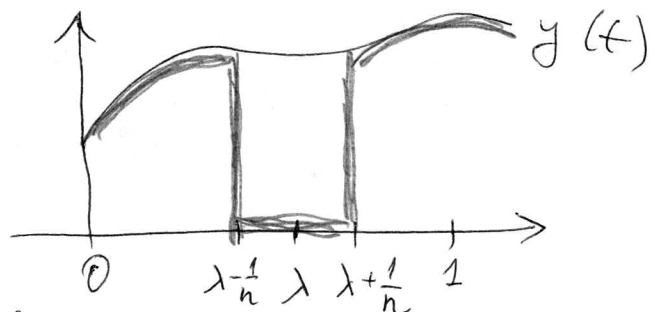
- 119 (a) Ω_λ является линейным пространством
 120 в $L_2[0, 1]$;
 121 (b) $\Omega_\lambda \subset \text{dom } (A - \lambda I)^{-1}$;
 122 (c) $\text{cl } \Omega_\lambda = L_2[0, 1]$.

123 Докажем (a): Если $y_1, y_2 \in \Omega_\lambda$ и
 124 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, то $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \Omega_\lambda$. В самом
 125 деле, если $\delta_1 > 0$ таково, что $\forall t \in [0, 1] : |t - \lambda| < \delta_1 \Rightarrow y_1(t) = 0$ и $\delta_2 > 0$ таково, что
 126 $\forall t \in [0, 1] : |t - \lambda| < \delta_2 \Rightarrow y_2(t) = 0$, то
 127 рассмотрим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$ получим,
 128 что $\forall t \in [0, 1] : |t - \lambda| < \delta \Rightarrow y(t) =$
 129 $= \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) = 0$. Значит, как и
 130 ранее отмечено, $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \Omega_\lambda$.
 131 Следовательно, Ω_λ — линейное
 132 пространство и (a) доказано.

134 Докажем (δ) : Если $y \in L_2$, то $\exists \delta > 0$
 135 если $|t - \lambda| < \delta$, то $y(t) = 0$. Значит,
 136 тогда $x = (A - \lambda I)^{-1} y = \frac{y(t)}{t - \lambda}$
 137 $\|x\|^2 = \int_0^1 |x(t)|^2 dt = \int_0^1 \frac{|y(t)|^2}{|t - \lambda|^2} dt =$
 138 $= \int_{[0,1] \cap \{t \mid |t - \lambda| < \delta\}} \frac{|y(t)|^2}{|t - \lambda|^2} dt + \int_{[0,1] \cap \{t \mid |t - \lambda| \geq \delta\}} \frac{|y(t)|^2}{|t - \lambda|^2} dt \leq$
 139 $\leq \frac{1}{\delta^2} \int_{[0,1] \cap \{t \mid |t - \lambda| \geq \delta\}} |y(t)|^2 dt \leq \frac{1}{\delta^2} \int_0^1 |y(t)|^2 dt =$
 $= \frac{1}{\delta^2} \|y\|_{L_2[0,1]}^2 < +\infty.$

140 Значит, такой $x(t) = \frac{y(t)}{t - \lambda}$ существует в $L_2[0,1]$.
 141 Следовательно, $\Omega_\lambda \subset \text{dom } (A - \lambda I)^{-1}$, что
 142 и доказывает (δ) .

144 Докажем (b) , т.е. утверждение, что Ω_λ
 145 плотно в $L_2[0,1]$. Для этого $\forall y \in L_2[0,1]$
 146 и $\forall n \in \mathbb{N}$ построим новую функцию
 147 $y_n(t) = \begin{cases} y(t), & \text{если } t \in [0,1] \text{ и } |t - \lambda| \geq \frac{1}{n}; \\ 0, & \text{если } t \in [0,1] \text{ и } |t - \lambda| < \frac{1}{n}. \end{cases}$



148
 149 Легко, что $y_n \in \Omega_\lambda$ (достаточно взять $\delta = \frac{1}{n}$).

150 Кроме того, $\|y - y_n\|_{L_2[0,1]}^2 = \int_0^1 |y(t)|^2 dt =$
 151 $=$ площадь подграфика функции $|y(t)|^2$ на
 152 интервале $[\lambda - \frac{1}{n}, \lambda + \frac{1}{n}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

153 Таким образом, $\forall y \in L_2[0,1]$ есть
 154 последовательность $y_1, \dots, y_n, \dots$
 155 функций $y_n \in L_2$ такую, что $\|y - y_n\|_{L_2[0,1]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
 156 т.е. $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$. Это и значит, что
 157 L_2 плотно в $L_2[0,1]$. Сл-во (б) доказано.

158 Из сл-ва (а)–(б) следует, что $\forall \lambda \in [0,1]$
 159 оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ определен на некотором
 160 подпространстве в $L_2[0,1]$ плотн-ве (но не
 161 определен во всем $L_2[0,1]$). Значит
 162 все такие λ входят в непрерывный
 163 спектр оператора A .

164 Ответ к задаче 1: $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus [0,1]$;
 165 $\sigma(A) = \sigma_c(A) = [0,1]$; $\sigma_p(A) = \sigma_r(A) = \emptyset$.

166 II решение задачи 1 (в котором используется
 167 теорема о продолжении сопряженного
 168 оператора к заданному спектру)

169 Используя I, упомянутую в строках
 170 41–109 можно повторить. Из нее мы
 171 знаем, что $\sigma_p(A) = \emptyset$ и $\sigma(A) = [0,1]$. Новое
 172 решение II состоит в том, что по новому

173 найти $\sigma_c(A)$ и $\sigma_r(A)$, т.е. тогда решение
174 строки 110-163 решения I сформулируем
175 рассуждениями:

176 Заметим, что $A^* = A$ потому, что $\forall x, y \in L_2[0,1]$
177 $(Ax, y) = \int_0^1 (Ax)(t) \overline{y(t)} dt = \int_0^1 t x(t) \overline{y(t)} dt =$
178 $= \int_0^1 x(t) \overline{ty(t)} dt = \int_0^1 x(t) \overline{Ay(t)} dt = (x, Ay).$

179 Поэтому, в соответствии со строкой 71 следует
180 написать $\sigma_p(A^*) = \sigma_p(A) = \emptyset$.

181 Поэтому у теоремы о унитарности
182 сопряженного оператора к компактно
183 спектра (см. строки 23-31) ~~не~~ выполняется
184 $\sigma_r(A) = \emptyset$.

185 Наконец, по ст-ву 1) спектра оператора
186 (см. строку 20) получаем $\sigma_c(A) =$
187 $= \sigma(A) = [0,1]$. и приходим к тому же
188 ответу еще задом 1, который сам
189 получаем в строках 164-165:

190 $\sigma_p(A) = \sigma_r(A) = \emptyset$; $\sigma_c(A) = \sigma(A) = [0,1]$;
191 $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus [0,1]$.

192 Вывод: использование теоремы о
193 унитарности сопряженного оператора позво-
194 лено упростить решение задачи 1
195 (а именно, заменить строки 110-163
196 строками 176-187).