

197 Задача 2. Пусть t_0 - фиксированное
198 вещественное число и оператор $A_{t_0}: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$
199 задан формулой

$$200 (A_{t_0} x)(t) = x(t + t_0),$$

201 где $x \in L_2(\mathbb{R})$ и $t \in \mathbb{R}$ - произвольные.
202 Найти спектр (и все его части) оператора A_{t_0}

203 Решение основывается на следующих
204 уже известных вам фактах:

205 A_{t_0} унитарен и $\|A_{t_0}\| = 1$ (см. задачу 2
из семинара 9);
206 $A_{t_0}^* = A_{-t_0}$ (см. задачу 5 из семинара 11);
207 $A_{t_0}^{-1} = A_{-t_0}$ (это очевидно, или легко
проверивший, друг).

208 Кроме того, в решении можно исполь-
209 зовать теорему о применении сопряжен-
210 ного оператора к нахождению спектра

211 Сделайте паузу в просмотре
212 видео и решите задачу 2 само-
213 стоятельно или, по крайней
214 мере, доберитесь до первого
215 непреодолимого препятствия в
216 решении.

217 Решение (Шаг I) Будет не просто
218 искать точный спектр, а сделать
219 несколько больше:

220 $\forall \text{ с.в. в } \sigma(A_{t_0}) \Rightarrow \sigma(A_{t_0}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|A_{t_0}\| = 1\}$
 221 $\Rightarrow \forall |\lambda| > 1 \exists (A_{t_0} - \lambda I)^{-1} \in \text{dom}(A_{t_0} - \lambda I)^{-1} = L_2(\mathbb{R})$
 222 Что значит, если $|\lambda| < 1$?
 223 Если $\lambda = 0$, то $(A_{t_0} - \lambda I)^{-1} = A_{t_0}^{-1} = A_{-t_0}$ и
 224 $\text{dom } A_{-t_0} = L_2(\mathbb{R}) \Rightarrow \lambda = 0$ элемент $\sigma(A)$.
 225 Если $0 < |\lambda| < 1$, то пусть $(A_{t_0} - \lambda I)^{-1}$ —
 226 пусть решит уравнение $(A_{t_0} - \lambda I)x = y$, т.е.
 227 решит уравнение $x(t+t_0) - \lambda x(t) = y(t)$.
 228 Сделаем замену $t+t_0 = s$ и положим $u = \lambda$:
 229 $x(s-t_0) - \frac{1}{\lambda} x(s) = -\frac{1}{\lambda} y(s-t_0)$ или
 230 $(A_{-t_0} - \frac{1}{\lambda} I)x = -\frac{1}{\lambda} A_{-t_0} y$ или
 231 $x = -\frac{1}{\lambda} (A_{-t_0} - \frac{1}{\lambda} I)^{-1} A_{-t_0} y$
 232 $\underbrace{\exists \text{ и определен}}_{\text{то всем } L_2(\mathbb{R})} \quad \underbrace{\exists \text{ и определен}}_{\text{то всем } L_2(\mathbb{R})}$
 233 $\Rightarrow \forall 0 < |\lambda| < 1$ оператор $(A_{t_0} - \lambda I)^{-1}$
 234 существует и определен то всем $L_2(\mathbb{R}) \Rightarrow$
 235 такие λ входят в $\sigma(A)$.
 236 Значит непрерывные на комплексной плоскости
 237 $\sigma(A_{t_0})$ остаются только такие
 238 $\lambda \in \mathbb{C}$, что $|\lambda| = 1$. Фиксируем такое λ
 239 и найдем его с.в. ненулевое решение
 240 y уравнения $A_{t_0} x - \lambda x = 0$, т.е. y
 241 $\text{уравнения } x(t+t_0) = \lambda x(t)$, где $x \in L_2(\mathbb{R})$.

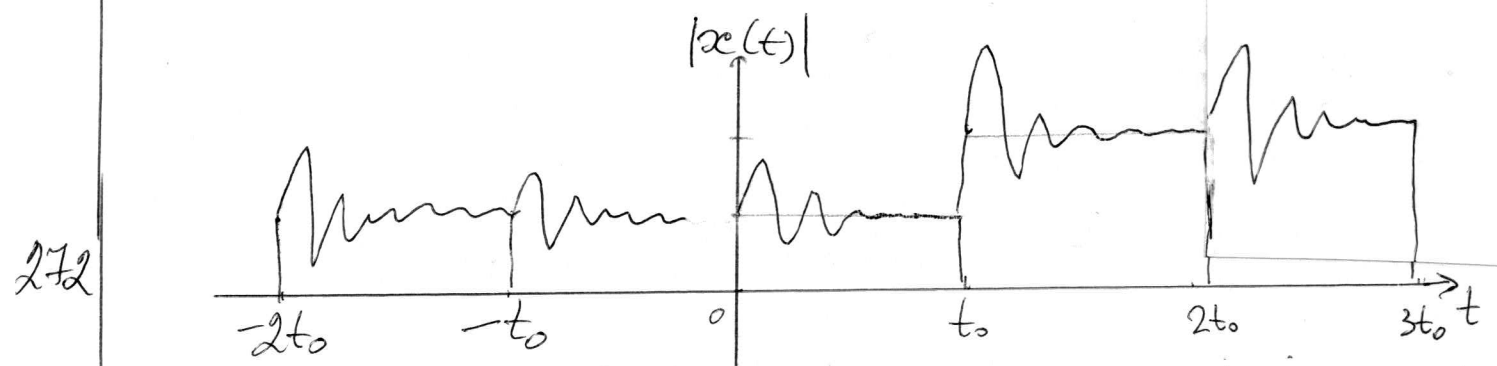
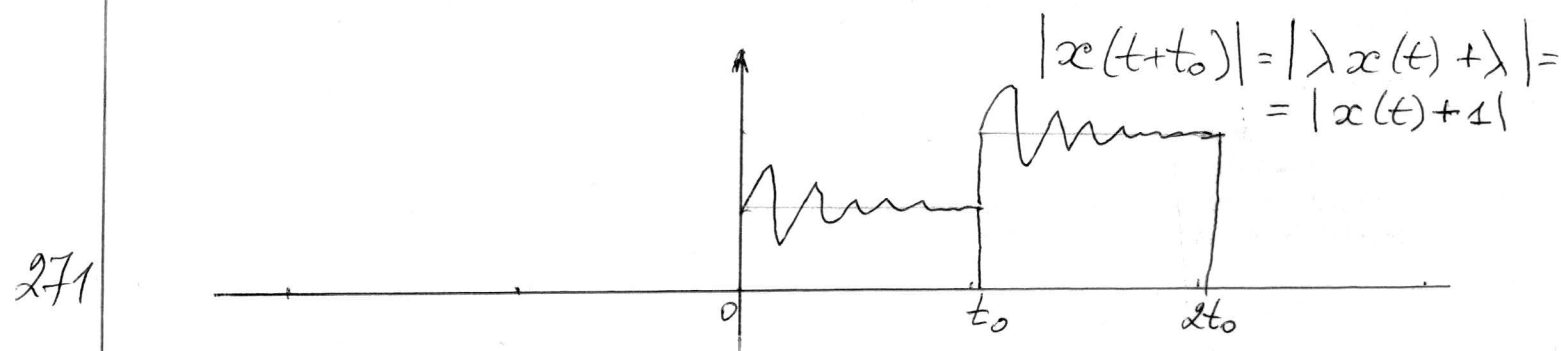
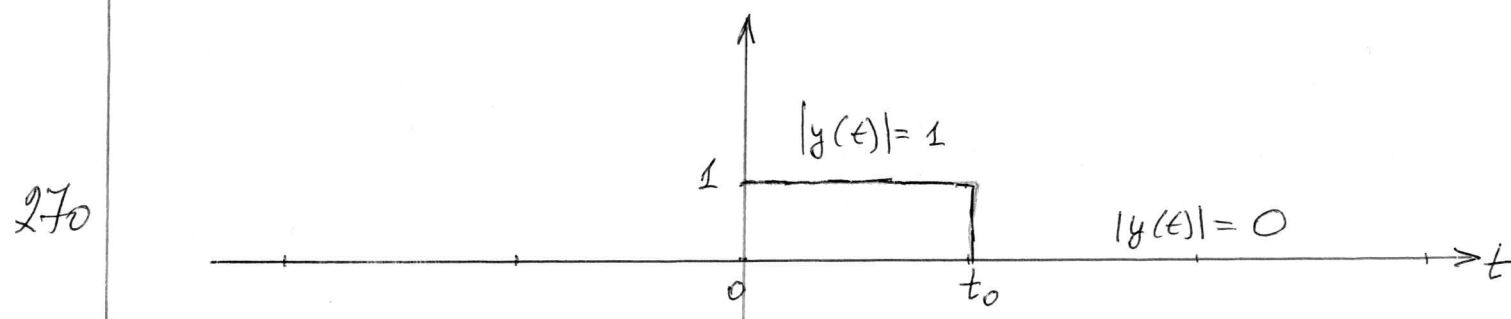
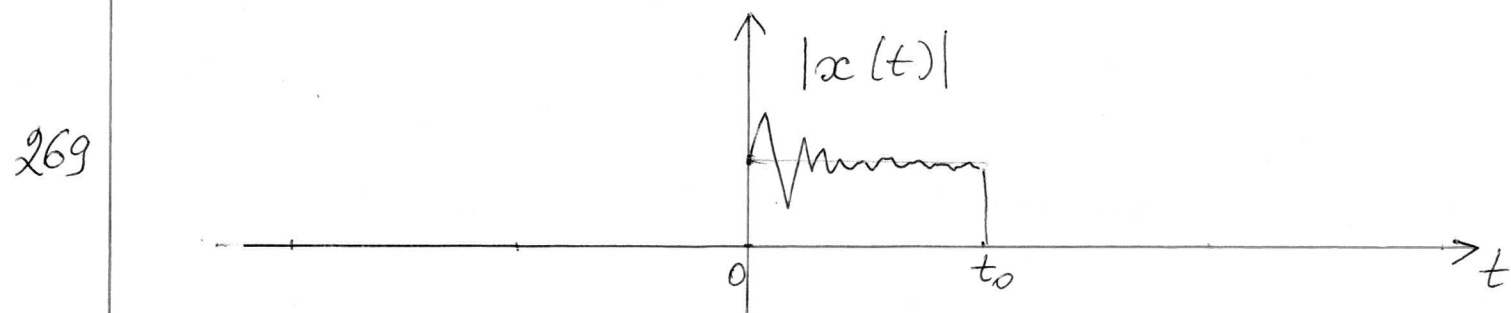
242 Тогда $|x(t+t_0)| = |\lambda x(t)| = |\lambda| \cdot |x(t)| = |x(t)|$
 243 т.е. $|x(t)|$ является t_0 -периодическим.
 244 Как известно, непрерывная функция
 245 имеет в $L_2(\mathbb{R})$ ноль и только ноль
 246 равна 0:
 247
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{nt_0}^{(n+1)t_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^{t_0} |x(t+nt_0)|^2 dt$$

 248
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^{t_0} |x(t)|^2 dt$$
 бесконечная сумма одинаковых
 249 слагаемых; такой ряд расходится $\Leftrightarrow \int_0^{t_0} |x(t)|^2 dt > 0$
 250 $\Leftrightarrow x(t) = 0$ ~~на~~ почти всюду в $[0, t_0]$ $\Leftrightarrow$
 251 $x(t) = 0$ почти всюду в $\mathbb{R}$ (из-за периодичности x).
 252 Итак, если $|\lambda| = 1$, то ур-ние $x(t+t_0) = \lambda x(t)$
 253 не имеет ненулевого решения. Значит,
 254 также λ не имеет в $\sigma_p(A_{t_0})$.

255 Тогдаже втор I шаг: $\sigma_p(A_{t_0}) = \emptyset$;
 256 $\sigma(A_{t_0}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$.

257 II шаг Проверим верно ли следующее утверждение,
 258 что $\sigma(A_{t_0}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$. Для
 259 того докажем $\lambda : |\lambda| = 1$ и $\lambda \neq 1$
 260 обрат оператору $(A_{t_0} - \lambda I)^{-1}$,
 261 т.е. докажем для любых $y \in L_2(\mathbb{R})$
 262 уравнение $(A_{t_0} - \lambda I)x = y$ имеет
 263 решение $x \in L_2(\mathbb{R})$?

264 Убедимся, что годя функция
 265 $y(t) = \begin{cases} \lambda, & \text{если } 0 < t < t_0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$
 266 и $|\lambda| = 1$ ур-ние $(A_{t_0} - \lambda I)x = y$ не имеет
 267 решения $x \in L_2(\mathbb{R})$. Тогда предположим решение ур-ния
 268 $x(t+t_0) - \lambda x(t) = y(t)$ не существует:



273 $|x(t+2t_0)| = |x(t+t_0+t_0)| =$
 274 $= |\lambda x(t+t_0) + y(t+t_0)| = |x(t+t_0)|$

Траект p -и $|x(t)|^2$ всегда неотрицателен
 (т.е. не может быть отрицателен) $(n t_0, (n+1) t_0)$
 Он всегда ограничен для $n \leq 0$ и
 $n \geq 1$). Т.е. интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$
 будет конечен если и только если
 выполнены следующие условия:

(a) $\int_0^{t_0} |x(t)|^2 dt = 0$, т.е. $x(t) = 0$.

(б) $\int_0^{t_0} |x(t)+1|^2 dt = 0$, т.е. $x(t)+1=0$.

Но эти условия несовместны. Противоречие
 возникает из-за того, что если предположить,
 что $x \in L_2(\mathbb{R})$.

Значит, для выбранного нами $y \in L_2(\mathbb{R})$
 уравнение $(A_{t_0} - \lambda I)x = y$ не имеет
 решения $x \in L_2(\mathbb{R})$ ни при каком $|\lambda|=1$.
 Значит, $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda|=1\} \subset \sigma(A_{t_0})$.

С учетом строки 256 получаем

$$\sigma(A_{t_0}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda|=1\}.$$

Теперь, когда мы знаем, что весь спектр
 совпадает с единичной окружностью, и
 $\sigma_p = \emptyset$, нам осталось найти какие из
 точек единичной окружности $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda|=1\}$
 принадлежат σ_c , а какие принадлежат
 σ_r .

В этой теме поможет теорема о
 приращении сопряжённого оператора и
 посылу спектра.
 Т.к. $A_{t_0}^* = A_{-t_0}$, то $\sigma_p(A_{t_0}^*) =$
 $= \sigma_p(A_{-t_0}) = \emptyset$. По теореме если
 $\lambda \notin \sigma_p(A_{t_0})$ (а это условие выполнено, т.к.
 $\sigma_p(A_{t_0}) = \emptyset$), то два условия эквивалентны:
 (1) $\lambda \in \sigma_r(A_{t_0})$;
 (2) $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A_{t_0}^*) = \sigma_p(A_{-t_0}) = \emptyset$.
 Значит, $\sigma_r(A_{t_0}) = \emptyset$ и $\sigma_c(A_{t_0}) = \{|\lambda| = 1\}$.
 Ответ: $\sigma(A_{t_0}) = \sigma_c(A_{t_0}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$
 $\sigma_p(A_{t_0}) = \sigma_r(A_{t_0}) = \emptyset$
 $\rho(A_{t_0}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \neq 1\}$.