

1 Основ функционального анализа. ФФ, II курс
2 В3 семинар: Спектр и резольвента ограниченного
3 Оператора. Применение сопряженного оператора к некото-
4 рому спектру. Компактные операторы и их спектр.
5 (По плану этот семинар проходит с 27 апреля по
6 2 мая 2020 г.)

7 Пусть H - гильбертово пр.-во над $\mathbb{C}$; $A: H \rightarrow H$ - ограни-
8 ченный линейный оператор. Тогда каждое $\lambda \in \mathbb{C}$
9 попадает в резольвентное см.-во или некоторую часть
10 спектра в зависимости от того, какая из следующих
11 ситуаций реализуется:

12 1) $\nexists (A - \lambda I)^{-1} \Rightarrow \lambda \in \sigma_p(A)$ - точечный спектр

13 2) $\exists (A - \lambda I)^{-1}$ и $\text{dom} [(A - \lambda I)^{-1}] = H$

14 $\Rightarrow \lambda \in \rho(A)$ - резольвентное см.-во;
15 $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ - спектр

16 3) $\exists (A - \lambda I)^{-1}$, $\text{dom} [(A - \lambda I)^{-1}] \neq H$, но $\text{cl} [\text{dom} (A - \lambda I)^{-1}] = H$

17 $\Rightarrow \lambda \in \sigma_c(A)$ - непрерывный спектр

18 4) $\exists (A - \lambda I)^{-1}$ и $\text{cl} [\text{dom} (A - \lambda I)^{-1}] \neq H$.

19 $\Rightarrow \lambda \in \sigma_r(A)$ - остаточный спектр

20 Св-ва спектра:

21 1) $\sigma = \sigma_p \cup \sigma_c \cup \sigma_r$; $\sigma_p \cap \sigma_c = \sigma_c \cap \sigma_r = \sigma_r \cap \sigma_p = \emptyset$.

22 2) $\sigma(A) \subset \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|A\| \}$.

23 3) $\sigma(A)$ - замкнутое см.-во в $\mathbb{C}$.

Теорема (о применении сопряженного оператора и
нахождению спектра): Пусть

H - гильбертово пр-во над $\mathbb{C}$;

$A: H \rightarrow H$ - ограниченный линейный оператор;

$\lambda \in \mathbb{C}$ такое, что $\lambda \notin \sigma_p(A)$.

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(1) $\lambda \in \sigma_r(A)$;

(2) $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$.

Задача 1. Выписать спектр (и все его части)

оператора $A: l_2 \rightarrow l_2$, заданного формулой

$Ax = (0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \dots)$, где

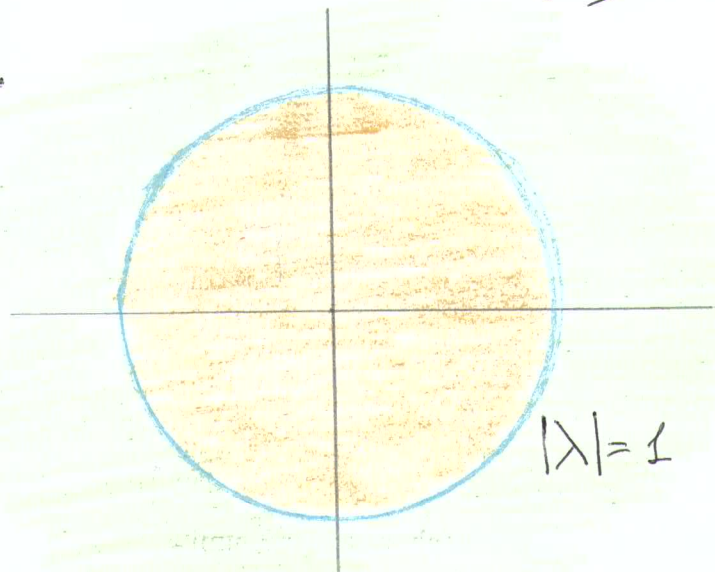
$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l_2$.

Сделайте паузу в просмотре видео и
решите задачу самостоятельно. Затем
сверьтесь с ответом и, если нужно,
просмотрите решение.

Ответ к задаче 1: $\sigma_p(A) = \emptyset$; $\sigma_c(A) = \{|\lambda| = 1\}$;

$\sigma_r(A) = \{|\lambda| < 1\}$; $\sigma(A) = \{|\lambda| \leq 1\}$;

$\rho(A) = \{|\lambda| > 1\}$.



Решение задачи 1: Мы уже изучали оператор A на определенных сечениях, а теперь знаем, что $\|A\| = 1$ (сеч. сечения 9, задача 3) и $A^*x = (x_2, x_3, \dots, x_{n+1}, \dots)$ (сеч. сечения 11, зад. 7).
 $\uparrow$ n -ое место

Идея: мысленно рассмотреть спектр, т.е. мысленно $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых ур-ние $Ax = \lambda x$ имеет ненулевое решение. Т.е. решение системы ур-ний

$$\begin{cases} 0 = \lambda x_1 \\ x_1 = \lambda x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} = \lambda x_n \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

а) $\lambda = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = \dots = 0 \Rightarrow 0 \notin \sigma_p(A)$.

б) $\lambda \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = \dots = 0 \Rightarrow \forall \lambda \neq 0 \lambda \notin \sigma_p(A)$.

Вывод: $\sigma_p(A) = \emptyset$.

II идея: мысленно обратимся к оператору $A - \lambda I$ и изучаем его область определения. Т.е. решаем уравнение $Ax - \lambda x = y$, т.е. решаем систему ур-ний

$$\begin{cases} 0 - \lambda x_1 = y_1 \\ x_1 - \lambda x_2 = y_2 \\ \dots \\ x_{n-1} - \lambda x_n = y_n \end{cases}$$

По об-ву 2) спектра (сеч. строку 22) $\sigma(A) \subset \{|\lambda| \leq 1\}$.

Убедимся, что и наоборот $\{|\lambda| \leq 1\} \subset \sigma(A)$.

Для этого достаточно убедиться, что $\forall \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1$

оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ не определён на векторе $y = (1, 0, 0, \dots)$

В самом деле, если $\lambda = 0$, то ур-ние $-\lambda x_1 = y_1$ (сеч. строку 62) не имеет решения.

Если $0 < |\lambda| \leq 1$, то из строк 62-64 мы находим

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{\lambda} \\ x_2 = -\frac{1}{\lambda^2} \\ \dots \\ x_n = -\frac{1}{\lambda^n} \\ \dots \end{cases}$$

Теперь нужно проверить, является ли построенный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ в пространстве ℓ_2 , т.е. сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|^{2n}}$.

Поскольку $0 < |\lambda| \leq 1$, то $\frac{1}{|\lambda|} \geq 1$ и этот ряд расходится (потому, что его общий член не стремится к нулю). Значит, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$: $|\lambda| \leq 1 \implies \text{dom}(A - \lambda I)^{-1} \neq H$, а значит, каждое такое λ входит в $\sigma(A)$ как и утверждалось в строке 66.

Вывод: $\sigma(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 1 \}$.

Остается понять, какой радиус спектра (σ_c или σ_r) принадлежит данному кругу. Заметим, что с помощью теоремы о приращении сопряжённого оператора к нахождению спектра

для этого найдём $\sigma_p(A^*)$, т.е. найдем λ , для которых уравнение $A^*x = \lambda x$ имеет ненулевое решение, т.е. будем искать ненулевые решения системы уравнений

$$\begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda x_2 \\ \dots \\ x_{n+1} = \lambda x_n \end{cases} \leftarrow \text{n-ое ур-ние}$$

Рассмотрим два случая:

a) $\lambda = 0 \Rightarrow x_2 = x_3 = \dots = 0$, а x_1 - любое $\Rightarrow \lambda = 0 \in \sigma_p(A^*)$;

b) $\lambda \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \dots \\ x_{n+1} = \lambda^n x_1 \end{cases}$

Теперь нужно показать элемент или конгломерат вектор $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, \dots)$ в ℓ_2 , т.е. сходится или $\text{рег } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|^{2(n-1)} |x_1|^2$. Значит, $\lambda \neq 0$ принадлежит $\sigma_p(A^*)$ если и только если $|\lambda| < 1$.

Результат: $\sigma_p(A^*) = \{|\lambda| < 1\}$.

то же самое $\Rightarrow \sigma_r(A) = \sigma_p(A^*) = \{|\lambda| < 1\}$

то св-во 1) спектра (св. строку 21) $\Rightarrow \sigma_c(A) = \{|\lambda| = 1\}$.

Задача 1 решить полностью.

Задача 2 Найти спектр (и все его части)

оператора $B: \ell_2 \rightarrow \ell_2$, заданного формулой

$Bx = (x_2, x_3, \dots, x_{n+1}, \dots)$, где

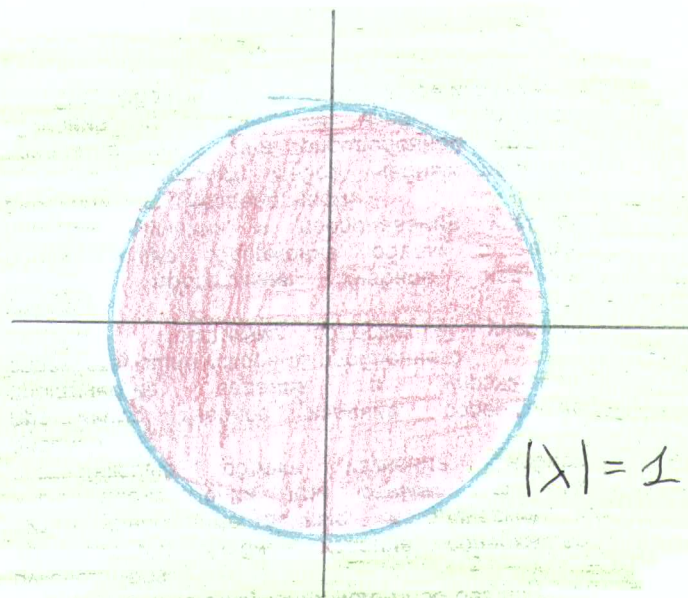
$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \ell_2$.

| Пауза

117 Ответ к заданию 2: $\sigma_p(B) = \{\lambda : |\lambda| < 1\}$,

118 $\sigma_c(B) = \{|\lambda| = 1\}$; $\sigma_r(B) = \emptyset$; $\sigma(B) = \{|\lambda| \leq 1\}$,

119 $\rho(B) = \{|\lambda| > 1\}$.



120

121 Решение задания 2: Мы уже изучали опера-

122 тор B на вещественных симплексах; поэтому

123 знаем, что

124 $\|B\| = 1$ (см. симплекс 9, задание 4);

125 $B^*x = (0, x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, \dots)$ (см. симп-

126 лекс 11, задание 8);

127 $B = A^*$, $B^* = A$, где A - оператор из задания 1;

128 $\sigma_p(B) = \sigma_p(A^*) = \{|\lambda| < 1\}$ (см. строку 108);

129 $\sigma_p(B^*) = \sigma_p(A) = \{|\lambda| < 1\}$ (см. строку 58)

130 Св-во 2) спектра (строка 22) $\Rightarrow \sigma(B) \subset \{|\lambda| \leq 1\}$

131 $\sigma_p(B) = \{|\lambda| < 1\}$ & св-во 3) спектра (стр. 23)

132 $\Rightarrow \{|\lambda| \leq 1\} \subset \sigma(B)$.

133 Вывод: $\sigma(B) = \{|\lambda| \leq 1\}$.

Остается показать, какие элементы спектра
(σ_c или σ_r) принадлежат точной
сущности $\{|\lambda| = 1\}$.

Если $|\lambda| = 1$, то $\lambda \notin \sigma_p(B) = \{|\lambda| < 1\}$

и, по теореме о приращении сопряженного
оператора и определению спектра, след
утверждения эквивалентны:

$$\lambda \in \sigma_r(B) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma_p(B^*) = \sigma_p(A) = \emptyset.$$

Значит, $\sigma_r(B) = \emptyset$.

Наконец, по св-ву 1) спектра (см.
строку 21), $\sigma_c(B) = \{|\lambda| = 1\}$.

Задача 2 решена.