

145 Опр. Пусть H, H_1 - гильбертовы пространства и
 146 $A: H \rightarrow H_1$ - линейный оператор. Тогда, то A
 147 является компактным оператором, если
 148 существует последовательность $A_1, \dots, A_n, \dots$
 149 линейных операторов такая, что
 150 (1) $\forall n \quad A_n: H \rightarrow H_1$ и является ограниченным;
 151 (2) $\forall n \quad \dim(\text{im } A_n) < +\infty$;
 152 (3) $A_n \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$.

153 Замечание: Операторы с конечномерным образом (т.е.
 154 удовлетворяющие св-ву (2)) для краткости называют
 155 конечномерными, если это не ведёт к недоразумениям.

156 Св-ва компактных операторов (См. п. 7.14 лекции):

- 157 (1) A, B - компактные $\Rightarrow \alpha A + \beta B$ - компактен $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
- 158 (2) A - компактен $\Rightarrow A$ ограничен;
- 159 (3) $A: H \rightarrow H_1$ - ограничен и $\dim H_1 < +\infty \Rightarrow A$ компактен
- 160 (4) $I: H \rightarrow H$ компактен $\Leftrightarrow \dim H < +\infty$.
- 161 (5) A - компактен, B и C - ограничены $\Rightarrow AB$ и CA -
 162 $A: H \rightarrow H_1$ - компактный обратимый оператор
 163 и $\dim H = \infty \Rightarrow A^{-1}$ не является ограниченным
- 164 (7) $A: H \rightarrow H_1$ - компактен и $\dim H = \infty \Rightarrow 0 \in \sigma(A)$.

165 Задача 3: Является ли компактным оператор

166 $A: l_2 \rightarrow l_2$, заданный формулой

167 $Ax = \left(\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2^2}x_2, \dots, \frac{1}{2^n}x_n, \dots \right)$, где

168 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$?

169 | Поставьте видео на паузу, решите задачу 3
 170 | самостоятельно, а затем продолжите
 171 | просмотр

172 Ответ к заданию 3: Оператор A компактен.

173 Решение: Будем действовать по определению
174 компактного оператора $\forall n$ зададим оператор
175 $A_n: \ell_2 \rightarrow \ell_2$ по формуле

176
$$A_n x = \left(\frac{1}{2} x_1, \frac{1}{2^2} x_2, \dots, \frac{1}{2^n} x_n, 0, 0, \dots \right),$$

177 где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \ell_2$.

178 Убедимся, что

179 (1) $\forall n$ A_n линейен и непрерывен;

180 (2) $\forall n$ $\dim(\operatorname{im} A_n) < +\infty$;

181 (3) $A_n \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$.

182 Как только мы проверим св-ва (1)-(3), по осно-
183 ванию определения компактного оператора мы
184 придём к заключению, что A компактен.

185 Проверим св-во (1): $\forall x, y \in \ell_2$ и $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ имеем

186
$$A_n(\alpha x + \beta y) = \left(\frac{1}{2}(\alpha x_1 + \beta y_1), \frac{1}{2^2}(\alpha x_2 + \beta y_2), \dots, \frac{1}{2^n}(\alpha x_n + \beta y_n), 0, 0, \dots \right)$$

187
$$= \alpha \left(\frac{1}{2} x_1, \frac{1}{2^2} x_2, \dots, \frac{1}{2^n} x_n, 0, 0, \dots \right) + \beta \left(\frac{1}{2} y_1, \frac{1}{2^2} y_2, \dots, \frac{1}{2^n} y_n, \dots \right) =$$

188
$$= \alpha A_n x + \beta A_n y. \Rightarrow A_n \text{ - линейен.}$$

189
$$\forall x \in \ell_2 \text{ имеем } \|A_n x\|^2 = \sum_{j=1}^n \left| \frac{1}{2^j} x_j \right|^2 \leq \frac{1}{2^2} \sum_{j=1}^n |x_j|^2 \leq$$

190
$$\leq \frac{1}{2^2} \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 = \frac{1}{2^2} \|x\|^2 \Rightarrow \|A_n\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A_n x\| \leq \frac{1}{2} < +\infty$$

191
$$\Rightarrow A_n \text{ - ограничен.}$$

192 Проверим св-во (2): Пусть $e_j = (0, 0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-е место}}}{1}, 0, \dots)$.

193 Если, то $\operatorname{im} A_n \subset L(e_1, \dots, e_n)$, где L -
194 линейная оболочка векторов, т.е.
195 $L(e_1, \dots, e_n) = \left\{ x \in \ell_2 \mid x = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j, \right.$
196 $\left. \text{где } \alpha_j \text{ - некоторые числа} \right\}.$

197 $\text{im } A_n \subset L(e_1, \dots, e_n) \Rightarrow \dim \text{im } A_n \leq n < +\infty.$

198 Проверим св. в (3): $\forall n$ и $\forall x \in l_2$ имеем

199
$$\| (A - A_n) x \|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} \left| \frac{1}{2^j} x_j \right|^2 \leq \frac{1}{2^{2(n+1)}} \sum_{j=n+1}^{\infty} |x_j|^2 \leq$$

200
$$\leq \frac{1}{2^{2(n+1)}} \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 = \frac{1}{2^{2(n+1)}} \|x\|^2. \Rightarrow$$

201
$$\|A_n - A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|(A_n - A)x\| \leq \frac{1}{2^{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow$$

202 $A_n \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$. Значит св. в (3) проверено,
203 а вместе с тем задана 3-я лемма, т.е.
204 доказано, что оператор A компактен.

205 Замечание. Подобные образы (т.е. именно по
206 определению) в п. 8.2 нашей лекции доказано
207 компактность оператора Гильберта - Шмидта
208 $A: L_2[a, b] \rightarrow L_2[a, b]$, заданного формулой

209
$$(Ax)(t) = \int_a^b K(t, s) x(s) ds,$$

210 где $K: [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ такова, что $\iint_{a, a}^b |K(t, s)|^2 dt ds < +\infty,$

211 а $x \in L_2[a, b]$.

212 Задача 4: Известно ли компактным оператор

213 $A_{t_0}: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$, заданной формулой

214
$$(A_{t_0} x)(t) = x(t + t_0),$$

215 где $t_0 \in \mathbb{R}$ - некоторое вещественное число?

216 } Сделайте паузу и попытайтесь
217 решить задачу самостоятельно
218 прежде, чем продолжить просмотр.

219 Ответ к задаче 4: $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ оператор A_{t_0} не является
220 компактным, хотя он ограничен.

221 И решение задачи 4: основывается на следующих
222 уже известных вам фактах (которые, впрочем,
223 легко можно доказать заново):

224 $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ оператор A_{t_0} самосопряженный и $\|A_{t_0}\| = 1$ (см.,
225 например, задачу 2 у семинара 9)

226 $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ оператор A_{t_0} обратим и $A_{t_0}^{-1} = A_{-t_0}$
227 (см. решение задачи 2 у семинара 11).

228 Будем рассуждать от противного. Т.е.
229 допустим, что при некотором $t_0 \in \mathbb{R}$

230 оператор A_{t_0} оказывается ~~ограниченным~~
231 компактным. Тогда

232
$$I = A_{t_0} \cdot A_{t_0}^{-1} = A_{t_0} \cdot A_{-t_0}$$

233 компактен по св-ву (5) компактных
234 операторов (см. строку 161). По св-ву (4)
235 компактных операторов (см. строку 160)
236 отсюда вытекает, что $\dim L_2(\mathbb{R}) < +\infty$.

237 Но это противоречит тому, что функции
238 Фрешета $y_n(x) = \underbrace{H_n(x)}_{\text{основные Фрешета}} e^{-x^2/2}$

239 ортонормированы на $\mathbb{R}$ с весом L_2 ,
240 а значит, $\dim L_2(\mathbb{R}) = \infty$. Полученное
241 противоречие и доказывает, что $\forall t_0$
242 оператор A_{t_0} не является компактным.

243

II решение задачи 4: 1/2 задачи 2

244

сформулируем 12 сущ. вопрос о спектре A_{t_0} :

245

$$\sigma(A_{t_0}) = \sigma_c(A_{t_0}) = \{|\lambda| = 1\}$$

246

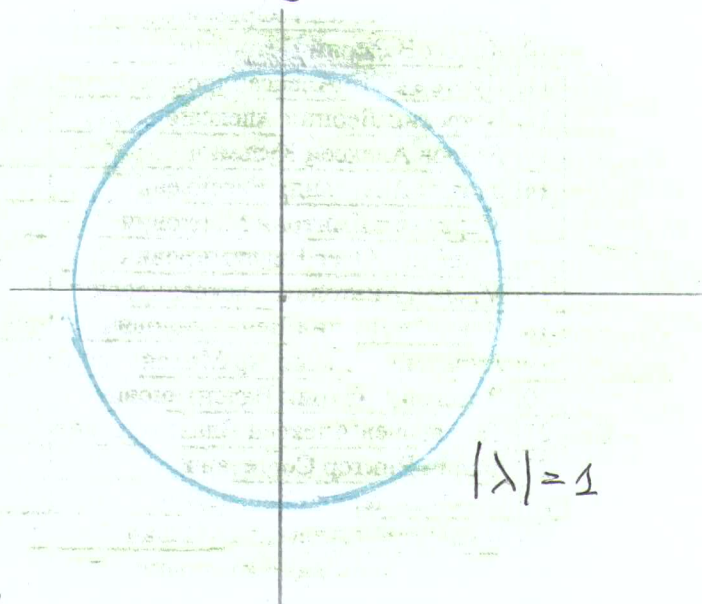
$$\sigma_p(A_{t_0}) = \sigma_r(A_{t_0}) = \emptyset$$

247

$$\rho(A_{t_0}) = \{|\lambda| \neq 1\}$$

Если
 $t_0 \neq 0$

248



249

Если $t_0 = 0$, то $A_{t_0} = I$ — тождественный

250

оператор. Его спектр две точки в задаче 11

251

и сформулируем 11:

252

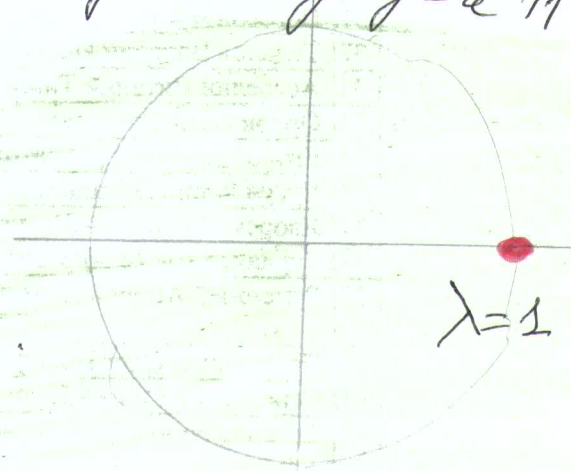
$$\sigma(A_0) = \sigma_p(A_0) = \{1\}$$

253

$$\sigma_c(A_0) = \sigma_r(A_0) = \emptyset$$

254

$$\rho(A_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \neq 1\}$$



255

Теперь известно, что $\forall t_0 \in \mathbb{R}$

256

$0 \notin \sigma(A_{t_0})$. Поскольку $\dim L_2(\mathbb{R}) = \infty$, то

257

по св-ву (7) компактных операторов

258

(см. стр. 164) оператор A_{t_0} не компактен

259

ни для $t_0 \in \mathbb{R}$.