

1 Основы функционального анализа. ФФ, II курс
2 15-й семинар: Альтернатива Фредгольма
3 Повторное ядро и резольвентное ядро интегрального
4 уравнения. (По плану этот семинар проходит
5 с 11 по 16 мая 2020г.)

6 Из пункта 8.4 лекции (Альтернатива Фредгольма) след
7 зует, что если N -многообразно ур-во, $A: N \rightarrow N$ -
8 компактный оператор и A^* -его сопряжённый, то
9 для неоднородного уравнения

$$10 \quad x - Ax = f \quad (H) \quad (K)$$

11 существуют только два случая:

12 (I) Сопряжённое однородное ур-ние

$$13 \quad y - A^*y = 0 \quad (Co) \quad (Co)$$

14 имеет только нулевое решение; при этом (K) имеет единств.

15 (II) Сопряжённое однородное ур-ие (Co) решение $\forall f$.

16 имеет n линейно независимых решений $y_1, \dots, y_n$;

17 при этом (K) имеет решение если и только если

$$18 \quad \forall k = 1, \dots, n \quad (y_k(t), f(t)) = 0, \text{ т.е. } y_k \perp f \quad \forall k.$$

19 Задача 1 Исследовать разрешимость уравнения

$$20 \quad x(t) - \lambda \int_0^1 t(1+s)x(s)ds = t^2 \quad (K) \quad (K)$$

21 при различных значениях λ , т.е. при каких λ

22 оно имеет единственное решение, ~~или~~ при каких λ

23 имеет много решений, и при каких λ оно не

24 имеет решение вообще.

25 Замечание: (В задаче 1)

26 Задача 1: (K) является уравнением с вырожден-

27 ным ядром. Поэтому в принципе след можно

28 найти все его решения ~~методами~~, изложенными на

29 семинаре 14. В задаче 1 предлагается исследовать

30 разрешимость (K). Не находя явно его решение.

31 Следует это позволяет альтернатива Фредгольма
Также для составленного решения

32 Очев и задане 1: если $\lambda \neq \frac{6}{5}$, то (H) имеет
 33 единственное решение; если $\lambda = \frac{6}{5}$, то (H) не имеет
 34 решений

35 Решение: $x(t) - \lambda \int_0^1 t(1+s)x(s)ds = t^2$ (H)

36 Ясно, что (H) является ур-нием с вырожденным ядром
 37 $K(t,s) = \lambda t(1+s) = P_1(t) Q_1(s)$, где, например, можно
 38 положить $P_1(t) = \lambda t$; $Q_1(s) = 1+s$.

39 Из пункта 8.2 следует, что если A -
 40 оператор Гильберта-Шмидта с ядром $K(t,s)$, то
 41 A^* тоже является оператором Гильберта-Шмидта и
 42 его ядро является г-м $K^*(t,s) = \overline{K(s,t)}$.

43 Поэтому в задане 1 ядро сопряженного оператора
 44 будет $K^*(t,s) = \overline{P_1(s) Q_1(t)} = \overline{\lambda s(1+t)}$. При этом
 45 (co) ур-ние имеет вид

46 $y - A^*y = 0 \Leftrightarrow y(t) - \overline{\lambda} \int_0^1 s(1+t)y(s)ds = 0$. (co).

47 Используя метод решения уравнений с вырожденным ядром
 48 изложенный на семинаре 14 (см. задания 5 и 6), видим, что
 49 всякое решение (co) имеет вид $y(t) = q(1+t)$, где q -
 50 "неопределенная константа". Подставив это выражение в (co)
 51 получаем

52 $q(1+t) - \overline{\lambda} \int_0^1 s(1+t)q(1+s)ds = 0 \Leftrightarrow$
 53 $q(1+t) - (1+t)\overline{\lambda} q \underbrace{\int_0^1 (s+s^2)ds}_{=\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}} = 0 \Leftrightarrow q(1+t)[1 - \overline{\lambda}\frac{5}{6}] = 0.$

54 Значит, если $\lambda \neq \frac{6}{5}$, то $[] \neq 0$ и $q = 0 \Rightarrow y(t) = 0 \Rightarrow$
 55 (co) имеет только нулевое решение $\Rightarrow$ (H) имеет
 56 единственное решение $\forall$ прав. член $f(t)$, в том
 57 числе и для $f(t) = t^2$.

58 Если $\lambda = \frac{6}{5}$, то q - любое $\Rightarrow y(t) = q(1+t)$ является
 59 решением (co) $\Rightarrow$ (H) имеет решение если и

и только если $t^2 \perp y(t)$, т.е. если $(t^2, 1+t) = 0$

т.е. $\int_0^1 t^2(1+t)dt = 0$, а это не верно, т.к.

$$\int_0^1 t^2(1+t)dt = \int_0^1 (t^2 + t^3)dt = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} > 0.$$

Значит при $\lambda = \frac{6}{5}$ ур-ние (н) не имеет решений.

Задача 2 Исследовать разрешимость уравнения

$$x(t) - \lambda \int_{-1}^1 (t+s)x(s)ds = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}t \quad (н)$$

при различных значениях λ .

Сделаем замену в уравнении выше.
Решим задачу 2 самостоятельно

Ответ к задаче 2: если $\lambda \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, то (н) имеет единственное решение; если $\lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, то (н) не имеет решения.

Решение: $K(t,s) = t+s = P_1(t)Q_1(s) + P_2(t)Q_2(s)$, где непрерыв, можно положить $P_1(t) = t$, $Q_1(s) = \lambda$, $P_2(t) = \lambda$; $Q_2(s) = s$.

Поэтому $K^*(t,s) = \overline{K(s,t)} = \overline{P_1(s)Q_1(t)} + \overline{P_2(s)Q_2(t)} =$
 $= \overline{\lambda s} + \overline{\lambda t} = \overline{\lambda}(s+t)$. Значит, (с) имеет вид

$$y(t) - \overline{\lambda} \int_{-1}^1 (s+t)y(s)ds = 0. \text{ Следовательно,}$$

с точностью до «непрерывных возмущений»

$y(t) = q_1 t + q_2$. Подставив это выражение в (7.7), получим

$$(q_1 t + q_2) - \overline{\lambda} \int_{-1}^1 (s+t)(q_1 s + q_2)ds = 0 \Leftrightarrow$$

$$q_1 t + q_2 - \overline{\lambda} t \underbrace{\int_{-1}^1 q_1 s ds}_{0} + \underbrace{\int_{-1}^1 q_2 ds}_{2q_2} - \overline{\lambda} \underbrace{\int_{-1}^1 q_1 s^2 ds}_{\frac{2}{3}q_1} + \underbrace{\int_{-1}^1 q_2 s ds}_{0} = 0 \Leftrightarrow$$

83 $(q_1 - \bar{\lambda} \cdot 2q_2)t + (q_2 - \bar{\lambda} \frac{2}{3}q_1) = 0 \quad \forall t \in [-1, 1]$

84 $\Leftrightarrow \begin{cases} q_1 = 2\bar{\lambda} q_2 \\ q_2 = \frac{2}{3}\bar{\lambda} q_1 \end{cases} \Rightarrow q_1 = \frac{4}{3}\bar{\lambda}^2 q_1$

85 Значит, если $\frac{4}{3}\bar{\lambda}^2 \neq 1$ (т.е. если $\lambda^2 \neq \frac{3}{4} \Leftrightarrow \lambda \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$), то

86 $q_1 = 0 \Rightarrow q_2 = 0 \Rightarrow y(t) = 0 \Rightarrow (co) = (77)$ имеет
87 только нулевое решение $\Rightarrow (K)$ имеет единственное
88 решение

89 Если же $\frac{4}{3}\bar{\lambda}^2 = 1$ (т.е. если $\lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$), то у (84)

90 выходя, что q_1 - свобод; при этом $q_2 = \frac{2}{3}\bar{\lambda} q_1$;

91 $y(t) \stackrel{(79)}{=} q_1 t + q_2 = q_1 (t + \frac{2}{3}\bar{\lambda}) = q_1 (t \pm \frac{\sqrt{3}}{3})$ - ненулевое

92 ненулевое решение (co). Считая произвольное

93 произведение $(f(t), y(t)) = (\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t, q_1(t \pm \frac{\sqrt{3}}{3})) =$

94 $= \frac{q_1}{2} \int_{-1}^1 (1+t)(t \pm \frac{\sqrt{3}}{3}) dt = \frac{q_1}{2} \int_{-1}^1 (\underbrace{t}_{0} + \underbrace{t^2}_{\frac{2}{3}} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{3}}_{\pm \frac{q_1 \sqrt{3}}{2}} + \underbrace{t \frac{\sqrt{3}}{3}}_{0}) dt =$

95 $= \frac{q_1}{2} (\frac{2}{3} \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}) \neq 0$. Значит условие разрешимости

96 у автономной Фредергольма не выполнено. Значит,

97 при $\lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ ур-ие (K) = (65) не имеет решений

98 Задача 3 Исследовать разрешимость ур-ия

99 $x(t) = \lambda \int_0^t x(s) ds + f(t) \quad (K)$

100 при различных значениях λ и различных правых
101 частях $f(t)$. Здесь $t \in [0, 1]$.

102 | Сформулируйте задачу в операторной форме.
103 | Решите задачу самостоятельно

104 Ответ к задаче 3 : ур-ние (к) имеет единственное
105 решение $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ и $\forall f \in L_2[0, 1]$.

106 Решение : Видно, что (к) можно записать в виде
107 $x(t) = \lambda(Ax)(t) + f(t)$, где $(Ax)(t) = \int_0^t x(s) ds$ -
108 оператор Вольтерра. Из задачи 6 следовало, что
109 для функции, что $(A^*y)(t) = \int_t^1 y(s) ds$. Св-во (2)
110 сопряженных операторов (см. л. 7.11 лекции)
111 выглядит так : $(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*$, а
112 значит (с) к ур-нию (107) имеет вид
113 $y(t) = -\bar{\lambda} \int_t^1 y(s) ds. \quad (с)$

114 То св-во интегрирования, зависящее от конечного предела,
115 для функции, что если в ~~правую~~ часть (113) под-
116 ставить любую ф-ию $y \in L_2[0, 1]$, то наше интегри-
117 рование получится непрерывно ф-ию. Значит,
118 любое решение (113) обязательно непрерывно.

119 Далее, если в правую часть (113) мы подставим
120 непрерывно ф-ию, то получим, что $y(t)$ - непре-
121 ровно диф-мо. Можно продолжить и дальше
122 "повышать гладкость" решения $y(t)$ ур-ия (113), и
123 наше непрерывно диф-мо $y(t)$ достаточно.

124. Поскольку $y(t)$ непрерывно диф-мо, то диффе-
125 ренцируя (113), получим

126
$$y'(t) = -\bar{\lambda} y(t)$$

127 Ф-лу (126) можно получить, интегрируя, у общих
 128 г-ев д-и по параметру интегрирования у которого
 129 от параметра зависит не только подынтегральное
 130 г-е, но и пределы интегрирования:
 131
$$\frac{d}{dy} \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx + \beta'(y) f(\beta(y), y) - \alpha'(y) f(\alpha(y), y).$$

132 Итак, (co) = (113) эквивалентно краевому заданию
 133 для д-го у-ия
$$\begin{cases} y'(t) = -\lambda y(t) \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

134 Тогда $y(t) = C e^{-\lambda t}$ - общее решение д-го у-ия.
 135 Оно может удовлетворять краевому условию только
 136 если $C = 0$.

137 Значит, (co) = (113) имеет только нулевое решение
 138 $y(t) = 0$. Следовательно, по лемме Фредгольма
 139 (верь оператор Вольтерра ⁽¹⁰⁷⁾ является замкнутой суммой
 140 оператора ~~Фредгольма~~ ^{Гильберта-Шмидта}, компактность которого мы
 141 докажем в л. 8.2 следующей) неоднородное у-ие
 142 (11) имеет единственное решение при любых
 143 правых членах $f \in L_2[0, 1]$.

144 Замечание ~~В~~ В принципе, если $f(t)$ непрерывно
 145 д-мо, то (99) эквивалентно краевому заданию
 146
$$\begin{cases} x'(t) = \lambda x(t) + f'(t) \\ x(0) = f(0) \end{cases}$$

 147 и можно применить теорему
 148 д-ых у-ий. Но это докажет те же существо-
 149 вания и единственности решения для (99) $\forall f \in L_2[0, 1]$,
 150 т.е. даже для недифференцируемых f .