

- 151 Типът $A : L_2[a, b] \rightarrow L_2[a, b]$ - оператор Тиевърът
 152 Множество е изпълнено $K \in L_2([a, b] \times [a, b])$, т.e.
 153 $(Ax)(t) = \int_a^b K(t, s)x(s)ds.$
- 154 Ч. n. 8.5 показва че за всички, които приемат
 155 уравнението $\int_a^b K(t, s)x(s)ds + f(t)$ икона $x = \mu Ax + f$
 156 $x(t) = \mu \int_a^b K(t, s)x(s)ds + f(t)$ икона $x = \mu Ax + f$
 157 където $|\mu| < \frac{1}{\|A\|}$ следващо уравнението б
 158 търгу Мюнхен
- 159 $x = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n A^n f,$
- 160 за A^n -та степен на оператора A , операторът
 161 определя се $A^0 = I$ - единичният оператор,
 162 $A^{n+1} = A \cdot A^n$. Тъкмо този оператор A^n (при всич
 163 $n \geq 1$) обикновен оператор Тиевърът-
 164 Множество. Обозначава се като $K_n(t, s)$
 165 имената на всичко
- 166 $K_n(t, s) = \int_a^b K(t, r) K_{n-1}(r, s)dr.$
- 167 K_n назовава се повторното изпълнение на оператора A .
 168 Тъкмо това пък имена (159) следващо уравнението так
 169 е:
- 170 $x = f + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n A^n f = f + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \int_a^b K_n(t, s)f(s)ds =$
 171 $= f + \int_a^b R(t, s; \mu) f(s)ds$, за

172

$$R(t, s; \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n K_n(t, s) - \text{ядро ядерное}$$

173

это ядро А, а интегральный оператор

174

$\int_a^b R(t, s; \mu) f(s) ds$ называется интегралом

175

ядра ядра А

176

Предположим, что

177

$$x(t) = f(t) + \int_a^b R(t, s; \mu) f(s) ds,$$

178

изображает преобразование решения интегрального уравнения

179

уравнения (156) под действием ядра ядра

180

это.

181

Задача 4. Для интегрального уравнения

182

$$x(t) = \lambda \int_0^1 (t \sin 2\pi s) x(s) ds + f(t)$$

183

найти ядро ядра, ядро ядра и ядро ядра

184

решение под действием ядра ядра. Найти решение

185

$$x(t), \text{ если } \lambda = -\frac{\pi}{2} \text{ и } f(t) = \cos 2\pi t.$$

186

Решение: $K_n(t, s) = \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^{n-1} t \sin 2\pi s;$

187

$$R(t, s; \lambda) = \frac{2\pi\lambda}{2\pi+\lambda} t \sin 2\pi s;$$

188

$$x(t) = f(t) + \frac{2\pi\lambda}{2\pi+\lambda} t \int_0^1 f(s) \sin 2\pi s ds;$$

189

$$\text{при } \lambda = -\frac{\pi}{2} \text{ и } f(t) = \cos 2\pi t \text{ имеем } x(t) = \cos 2\pi t.$$

| Задача для исследования ядра ядра

190 Premenne zagonu 4: $K(t, s) = t \cdot \sin 2\pi s$

191 $K_2(t, s) = \int_0^1 K(t, r) K(r, s) dr = \int_0^1 (t \sin 2\pi r)(r \sin 2\pi s) dr =$

192 $= (t \sin 2\pi s) \int_0^1 r \sin 2\pi r dr = (t \sin 2\pi s) \left[\left(-\frac{1}{2\pi} \right) r \cos 2\pi r \right]_0^1 =$

193 $= (t \sin 2\pi s) \left(-\frac{1}{2\pi} \right) \left[r \cos 2\pi r \Big|_{r=0}^{r=1} - \int_0^1 \cos 2\pi r dr \right] =$

194 $= (t \sin 2\pi s) \left(-\frac{1}{2\pi} \right) = \left(-\frac{1}{2\pi} \right) K(t, s).$

195 Tenoreye: $K_n(t, s) = \left(-\frac{1}{2\pi} \right)^{n-1} K(t, s)$. Dokazeeem ee

196 no ungykysem. Faxe ungykysem: $n=2$ - lepus. Mar ungy-

197 yeeem: $K_{n+1}(t, s) = \int_0^1 K_n(t, r) K(r, s) dr = \left(-\frac{1}{2\pi} \right)^{n-1} \int_0^1 K(t, r) K(r, s) dr =$

198 $= \left(-\frac{1}{2\pi} \right)^{n-1} \left(-\frac{1}{2\pi} \right) K(t, s) = \left(-\frac{1}{2\pi} \right)^n K(t, s)$. Tenoreye dokazanee,

199 t.e. nobornare egspe kai gelaan.

200 Kai gelaan peysel kai nroe egspe: $R(t, s; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n K_n(t, s)$

201 $= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \left(-\frac{1}{2\pi} \right)^{n-1} K(t, s) = \lambda K(t, s) \sum_{m=0}^{\infty} \left(-\frac{\lambda}{2\pi} \right)^m =$

$m=n-1$

202 $= \lambda (t \sin 2\pi s) \frac{1}{1 - \left(-\frac{\lambda}{2\pi} \right)} = (t \sin 2\pi s) \frac{2\pi \lambda}{2\pi + \lambda}$. - fogg exogeeus jum
 $|\lambda| < 2\pi$.

203 Sfriegdoabusee pereenue yp-uu (182) egspe - fogg exogeeus jum
204 egspe (see. (171)):

205 $x(t) = f(t) + \int_0^1 t \sin 2\pi s \cdot \frac{\frac{2\pi \lambda}{2\pi + \lambda}}{ds} f(s) ds =$

206 $= f(t) + \frac{\frac{2\pi \lambda}{2\pi + \lambda}}{ds} t \int_0^1 f(s) \sin 2\pi s ds.$

207 Iffu $\lambda = -\frac{\pi}{2}$ u $f(t) = \cos \frac{\pi}{2} t$ naseyymee $x(t) = \cos \frac{\pi}{2} t$

208 (kogb yp-uu $\cos 2\pi s$ u $\sin 2\pi s$ qroqrazeebua ne

209 nesprogle, t.e. ne ypselenyotke $(0, 1)$).

210 Zagara 5 Дана характеристика уравнения

$$x(t) = \lambda \int_0^t te^s x(s) ds + f(t)$$

Найти поборную ягы, передающую ягы и
возвращающее значение ягы передающей ягы.

Найти значение $x(t)$, если $\lambda = \frac{1}{2}$ и $f(t) = e^{-t}$.

|
Также существует ли решения

216 Ответ: $\forall n \quad k_n(t,s) = k(t,s) = te^s$;

$$R(t,s; \lambda) = \frac{\lambda}{1-\lambda} te^s;$$

$$x(t) = f(t) + \frac{\lambda t}{1-\lambda} \int_0^1 e^s f(s) ds;$$

$$\text{если } \lambda = \frac{1}{2} \text{ и } f(t) = e^{-t}, \text{ то } x(t) = t + e^{-t}.$$

220 Проверка загара 5: $k(t,s) = k_1(t,s) = te^s$.

$$\begin{aligned} k_2(t,s) &= \int_0^1 k(t,r) k(r,s) dr = \int_0^1 te^r \cdot re^s dr = te^s \int_0^1 r e^{r+s} dr = \\ &= te^s \int_0^1 r d(e^{r+s}) = te^s [re^{r+s}]_{r=0}^{r=1} - \int_0^1 e^{r+s} dr = \\ &= te^s [1 \cdot e - e^{r+s}]_{r=0}^{r=1} = te^s [e - (e-1)] = ts = k(t,s). \end{aligned}$$

но не верно

224 Проверка: $k_n(t,s) = k(t,s)$. Доказывается по
индукции. Так же выясняем: $n = 2$ - верно. Известно, что верно.

$$k_{n+1}(t,s) = \int_0^1 K_n(t,r) k(r,s) dr = \int_0^1 k(t,r) k(r,s) dr = k(t,s).$$

Проверка получена, т.е. поборная ягы верна.

$$R(t,s; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n k_n(t,s) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \right) k(t,s) = \frac{\lambda}{1-\lambda} k(t,s) = \frac{\lambda}{1-\lambda} te^s$$

$$x(t) = f(t) + \int_0^1 R(t,s; \lambda) f(s) ds = f(t) + \frac{\lambda t}{1-\lambda} \int_0^1 e^s f(s) ds.$$

$$\text{если } \lambda = \frac{1}{2} \text{ и } f(t) = e^{-t}, \text{ то } x(t) = e^{-t} + t.$$

- 231 Zadanie 6 Дана итерпирующая формула для вычисления
 232 рода $x(t) = \lambda \int_0^t x(s) ds + f(t)$, $t \in [0, 1]$
 233 наименование метода
 234 итерпирующее значение $f(t)$ называется ядром.
 235 | Ядро есть каскадное перемножение
- 236 Определение: $k_n(t, s) = \frac{1}{(n-1)!} (t-s)^{n-1} K(t, s);$
 237 $R(t, s; \lambda) = \lambda e^{\lambda(t-s)} K(t, s);$
 238 $x(t) = f(t) + \lambda \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s) ds.$
- 239 Приемы ядра: $k(t, s) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < s < t \\ 0, & \text{если } t < s < 1. \end{cases}$
- 240 $k_2(t, s) = \int_0^t k(t, r) K(r, s) dr = \cancel{\int_s^t k(t, r) K(r, s) dr}$
 241
 $\int_s^t 1 \cdot dr = (t-s), \quad \text{если } s < t = (t-s) K(t, s).$
 242 $= \begin{cases} \int_s^t 1 \cdot dr = (t-s), & \text{если } s < t \\ 0, & \text{если } t \leq s \end{cases}$
- 243 Доказательство: $k_n(t, s) = \frac{1}{(n-1)!} (t-s)^{n-1} K(t, s)$. Доказывается
 244 по индукции. Для случая $n=2$ - ясно. Наш

$$245 \text{ Unaggiugere: } K_{n+1}(t, s) = \int_0^t K_n(t, r) K_n(r, s) dr =$$

$$246 = \int_0^t \frac{1}{(n-1)!} (r-s)^{n-1} k(t, r) K_n(r, s) dr =$$

$$247 = \begin{cases} \frac{1}{(n-1)!} \int_s^t (r-s)^{n-1} dr, & \text{se } s < t \\ 0, & \text{se } t \leq s \end{cases} =$$

$$248 = \begin{cases} \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{n} (r-s)^n \Big|_{r=s}^{r=t}, & \text{se } s < t \\ 0, & \text{se } t \leq s \end{cases} =$$

$$249 = \frac{1}{n!} (t-s)^n k(t, s). \quad \text{Tenoreya gowajee, a keeeeeere c' uen' kowgexa u uobospune egje}$$

$$251 R(t, s; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n K_n(t, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \frac{1}{(n-1)!} (t-s)^{n-1} k(t, s) =$$

$$252 = \lambda \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m (t-s)^m}{m!} \right] k(t, s) = \lambda e^{\lambda(t-s)} k(t, s).$$

$e^y = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!}$

$$253 x(t) = f(t) + \int_0^t \lambda e^{\lambda(t-s)} k(t, s) f(s) ds =$$

$$254 = f(t) + \lambda \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s) ds.$$