Пусть $A : L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ - оператор Гильберта-Шмидта с ядром $K \in L_2([a,b]\times[a,b])$, т.е.

$$(Ax)(t) = \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds.$$

Из п. 8.5 лекций мы знаем, что решение уравнения Фредгольма II рода

$$x(t) = \mu\int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds + f(t) \quad \text{или} \quad x = \mu A x + f$$

при $|\mu| < \frac{1}{\|A\|}$ может быть записано в виде ряда Неймана

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n A^n f,$$

где $A^n$ - n-я степень оператора $A$, определяемая формулами $A^0 = I$ - тождественный оператор, $A^{n+1} = A\cdot A^n$. При этом оператор $A^n$ (при всех $n \geqslant 1$) является оператором Гильберта-Шмидта. Обозначив его ядро через $K_n(t,s)$ можем написать

$$K_n(t,s) = \int_a^b K(t,r)\,K_{n-1}(r,s)\,dr.$$

$K_n$ называются повторными ядрами оператора $A$. При этом ряд Неймана (159) можно записать так:

$$x = f + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n A^n f = f + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \int_a^b K_n(t,s) f(s)\,ds =$$

$$= f + \int_a^b R(t,s;\mu)\, f(s)\,ds, \text{ где}$$

$R(t,s;\mu)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu^n K_n(t,s)$ – резольвентное ядро оператора $A$, а интегральный оператор $\int_a^b R(t,s;\mu)f(s)ds$ называют интегральной резольвентой оператора $A$.

Формулу (171), а именно

$$x(t)=f(t)+\int_a^b R(t,s;\mu)f(s)ds,$$

называют представлением решения интегрального уравнения (156) через резольвентное ядро.

<u>Задача 4</u>. Для интегрального уравнения

$$x(t)=\lambda\int_0^1 (t\sin 2\pi s)\,x(s)ds+f(t)$$

найти повторные ядра, резольвентное ядро и выразить решение через резольвентное ядро. Найти решение $x(t)$, если $\lambda=-\frac{\pi}{2}$ и $f(t)=\cos 2\pi t$.

<u>Ответ:</u> $K_n(t,s)=\left(-\frac{1}{2\pi}\right)^{n-1} t\sin 2\pi s$;

$R(t,s;\lambda)=\frac{2\pi\lambda}{2\pi+\lambda}\,t\sin 2\pi s$;

$x(t)=f(t)+\frac{2\pi\lambda}{2\pi+\lambda}\,t\int_0^1 f(s)\sin 2\pi s\,ds$;

при $\lambda=-\frac{\pi}{2}$ и $f(t)=\cos 2\pi t$ имеем $x(t)=\cos 2\pi t$.

Пауза для самостоятельного решения

__Решение задачи 4:__ $K(t,s) = t\cdot \sin 2\pi s$

$$K_2(t,s) = \int_0^1 K(t,r)\,K(r,s)\,dr = \int_0^1 (t \sin 2\pi r)(r \sin 2\pi s)\,dr =$$

$$= (t \sin 2\pi s) \int_0^1 r \sin 2\pi r\,dr = (t \sin 2\pi s) \int_0^1 \left(-\frac{1}{2\pi}\right) r\, d(\cos 2\pi r) =$$ по частям

$$= (t \sin 2\pi s)\left(-\frac{1}{2\pi}\right)\Big[\, r \cos 2\pi r \Big|_{r=0}^{r=1} - \underbrace{\int_0^1 \cos 2\pi r\,dr}_{=0}\Big] =$$

$$= (t \sin 2\pi s)\left(-\frac{1}{2\pi}\right) = \left(-\frac{1}{2\pi}\right) K(t,s).$$

__Гипотеза:__ $K_n(t,s) = \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^{n-1} K(t,s)$. Докажем её по индукции. База индукции: $n=2$ — верно. Шаг индукции:

$$K_{n+1}(t,s) = \int_0^1 K_n(t,r)\,K(r,s)\,dr = \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^{n-1} \int_0^1 K(t,r)\,K(r,s)\,dr =$$

$$= \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^{n-1}\left(-\frac{1}{2\pi}\right) K(t,s) = \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^{n} K(t,s).$$ Гипотеза доказана, т.е. повторные ядра найдены.

Найдём резольвентное ядро: $R(t,s;\lambda) \overset{(172)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n K_n(t,s) =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^{n-1} K(t,s) \underset{m=n-1}{=} \lambda K(t,s) \sum_{m=0}^{\infty} \left(-\frac{\lambda}{2\pi}\right)^m =$$

$$= \lambda (t \sin 2\pi s) \frac{1}{1 - \left(-\frac{\lambda}{2\pi}\right)} = (t \sin 2\pi s) \frac{2\pi\lambda}{2\pi + \lambda}.$$ — ряд сходится для $|\lambda| < 2\pi$.

Представим решение ур-ия (182) через ~~ре~~ резольвентное ядро (см. (171)):

$$x(t) = f(t) + \int_0^1 t \sin 2\pi s \cdot \frac{2\pi\lambda}{2\pi+\lambda} f(s)\,ds =$$

$$= f(t) + \frac{2\pi\lambda}{2\pi+\lambda}\, t \int_0^1 f(s) \sin 2\pi s\,ds.$$

При $\lambda = -\frac{\pi}{2}$ и $f(t) = \cos 2\pi t$ получим $x(t) = \cos 2\pi t$ (ведь ф-ии $\cos 2\pi s$ и $\sin 2\pi s$ ортогональны на периоде, т.е. на промежутке $(0,1)$).

Задача 5 Для интегрального уравнения

$$x(t) = \lambda \int_0^1 t e^s x(s)\,ds + f(t)$$

найти повторные ядра, резольвентное ядро и выразить решение через резольвентное ядро.
Найти решение $x(t)$, если $\lambda = \frac{1}{2}$ и $f(t) = e^{-t}$.

Задача для самостоятельного решения

Ответ: $\forall n \ K_n(t,s) = K(t,s) = te^s$;

$R(t,s;\lambda) = \frac{\lambda}{1-\lambda} te^s$;

$x(t) = f(t) + \frac{\lambda t}{1-\lambda} \int_0^1 e^s f(s)\,ds$;

если $\lambda = \frac{1}{2}$ и $f(t) = e^{-t}$, то $x(t) = t + e^{-t}$.

Решение задачи 5: $K(t,s) = K_1(t,s) = te^s$.

$$K_2(t,s) = \int_0^1 K(t,r)K(r,s)\,dr = \int_0^1 te^r \cdot re^s\,dr = te^s \int_0^1 re^r\,dr =$$

по частям

$$= te^s \int_0^1 r\,d(e^r) = te^s\left[re^r\Big|_{r=0}^{r=1} - \int_0^1 e^r\,dr\right] =$$

$$= te^s\left[1 \cdot e - e^r\Big|_{r=0}^{r=1}\right] = te^s[e - (e-1)] = ts = K(t,s).$$

Гипотеза: $K_n(t,s) = K(t,s)$. Доказываем по индукции. База индукции: $n = 2$ - верно. Шаг индукции:

$$K_{n+1}(t,s) = \int_0^1 K_n(t,r)K(r,s)\,dr = \int_0^1 K(t,r)K(r,s)\,ds = K(t,s).$$

Гипотеза доказана, т.е. повторные ядра найдены.

$$R(t,s;\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n K_n(t,s) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n\right) K(t,s) = \frac{\lambda}{1-\lambda} K(t,s) = \frac{\lambda}{1-\lambda} te^s.$$

$$x(t) = f(t) + \int_0^1 R(t,s;\lambda) f(s)\,ds = f(t) + \frac{\lambda t}{1-\lambda} \int_0^1 e^s f(s)\,ds.$$

Если $\lambda = \frac{1}{2}$ и $f(t) = e^{-t}$, то $x(t) = e^{-t} + t$.

Задача 6. Для интегрального ур-ния Вольтерра II рода $x(t) = \lambda \int_0^t x(s)\,ds + f(t)$, $t \in [0,1]$ найти повторные ядра, резольвентное ядро и выразить решение через резольвентное ядро.

Пауза для самостоятельного решения

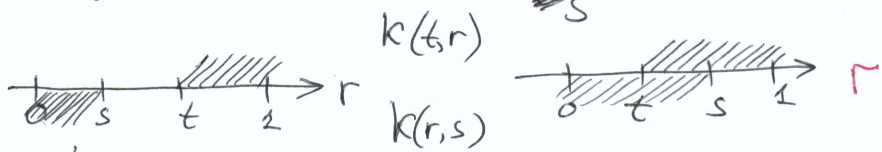
Ответ: $K_n(t,s) = \frac{1}{(n-1)!}(t-s)^{n-1} K(t,s)$;

$R(t,s;\lambda) = \lambda e^{\lambda(t-s)} K(t,s)$;

$x(t) = f(t) + \lambda \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s)\,ds$.

Решение задачи 6: $K(t,s) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0<s<t \\ 0, & \text{если } t<s<1. \end{cases}$

$K_2(t,s) = \int_0^1 K(t,r) K(r,s)\,dr = \cancel{\int_s^t 1\cdot dr = (t-s)}$




$= \begin{cases} \int_s^t 1\cdot dr = (t-s), & \text{если } s<t \\ 0, & \text{если } t<s \end{cases} = (t-s)K(t,s).$

Гипотеза: $K_n(t,s) = \frac{1}{(n-1)!}(t-s)^{n-1}K(t,s)$. Доказываем по индукции. База индукции: $n=2$ – верно. Шаг

245 индукции: $K_{n+1}(t,s)=\int_0^1 K_1(t,r)K_n(r,s)\,dr=$

246 $$=\int_0^1 \frac{1}{(n-1)!}(r-s)^{n-1}k(t,r)k(r,s)\,dr=$$

247 $$=\begin{cases}\frac{1}{(n-1)!}\int_s^t (r-s)^{n-1}dr, & \text{если } s<t\\ 0, & \text{если } t<s\end{cases}=$$

248 $$=\begin{cases}\frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{n}(r-s)^{n}\Big|_{r=s}^{r=t}, & \text{если } s<t\\ 0, & \text{если } t<s\end{cases}=$$

249 $=\frac{1}{n!}(t-s)^{n}k(t,s)$. Гипотеза доказана, а вместе

250 с ней найдены и повторные ядра

251 $$R(t,s;\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n}K_n(t,s)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n}\frac{1}{(n-1)!}(t-s)^{n-1}k(t,s)=$$

252 $$\underset{m=n-1}{=}\lambda\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^{m}(t-s)^{m}}{m!}\right]k(t,s)\underset{e^{y}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{y^{m}}{m!}}{=}\lambda e^{\lambda(t-s)}k(t,s).$$

253 $$x(t)=f(t)+\int_0^1 \lambda e^{\lambda(t-s)}k(t,s)f(s)\,ds=$$

254 $$=f(t)+\lambda\int_0^t e^{\lambda(t-s)}f(s)\,ds.$$