

1 Основы функционального анализа. ФФ, II курс.
2 16-й семестр: Характеристические значения и
3 собственные функции интегральных уравнений с
4 симметричным ядром. Представление решения
5 неоднородного ур-ния Фредгольма с симметрич-
6 ным ядром в виде ряда по собственным функ-
7 ционам ядра

8 Опр. Пусть $A: L_2[a, b] \rightarrow L_2[a, b]$ - интеграль-
9 ный оператор Тильберга-Швингта с ядром $K(t, s)$.
10 Функцию $x \in L_2[a, b]$ называют собственной функ-
11 цией интегрального уравнения $x = \mu Ax$, ~~если~~
12 (или собственной функцией ядра $K(t, s)$), если
13 $x \neq 0$ и $x = \mu Ax$ при некотором $\mu \in \mathbb{C}$ (такое μ
14 называют характеристическим значением ур-ния
15 $x = \mu Ax$ или характеристическим значением ядра K).
16 Другим образом: $\lambda \neq 0$ является собственным
17 значением оператора A (т.е. $\exists x \neq 0: Ax = \lambda x$) $\Leftrightarrow$
18 $\mu = 1/\lambda$ является характеристическим значением
19 уравнения $x = \mu Ax$.

20 Теорема: Если ядро симметрично (т.е. $K(t, s) = \overline{K(s, t)}$),
21 то все его характеристические значения вещественны, а
22 собственные ф-ции, отвечающие различным характе-
23 ристическим значениям, ортогональны друг другу.

24 Задача 1: Найти характеристические значения и
25 нормированные собственные функции интегрального
26 уравнения $x(t) - \mu \int_0^\pi x(s) \cos(t-s) ds = 0$.

27 | Задача для самостоятельного решения

28. Ответ к задаче 1: $\mu_1 = \frac{2}{\pi}$, $x_1(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos t$;
 29. $\mu_2 = -\frac{2}{\pi}$, $x_2(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin t$.
 30. Решение: Ядро K симметрично (т.к. $K(t,s) =$
 31. $= \cos(t-s) = \cos(s-t) = \cos(s-t) = K(s,t)$) и лежит
 32. в $L_2([0,\pi] \times [0,\pi])$ (т.к. всякая непрерывная ф-ция
 33. интегрируема по любому треугольнику). Кроме
 34. того, ядро $K(t,s)$ вырожденное, поскольку
 35. $K(t,s) = \cos(t-s) = \cos t \cdot \cos s - \sin t \sin s = P_1(t)Q_1(s) + P_2(t)Q_2(s)$.
 36. Поэтому в ур-нии (26) ищем "общий вид решения
 37. с точностью до коэффициентов q_1, q_2 ":
 38. $x(t) = q_1 P_1(t) + q_2 P_2(t) = q_1 \cos t + q_2 \sin t$. Подставив
 39. (38) в (26), будем иметь $q_1 \cos t + q_2 \sin t = x(t) =$
 40. $= \mu \int_0^\pi x(s) \cos(t-s) ds = \mu \int_0^\pi (q_1 \cos s + q_2 \sin s) (\cos t \cos s - \sin t \sin s) ds$
 41. $= \mu \cos t [q_1 \int_0^\pi \cos^2 s ds + q_2 \int_0^\pi \sin s \cos s ds] - \mu \sin t [q_1 \int_0^\pi \cos s \sin s ds +$
 42. $+ q_2 \int_0^\pi \sin^2 s ds] = \mu q_1 \frac{\pi}{2} \cos t - \mu q_2 \frac{\pi}{2} \sin t$. Поскольку
 43. равенство верно с любым значением t :
 44. $\int_0^\pi \cos^2 s ds = \int_0^\pi \frac{1 + \cos 2s}{2} ds = \frac{\pi}{2}$;
 45. $\int_0^\pi \cos s \sin s ds = \int_0^\pi \frac{\sin 2s}{2} ds = 0$;
 46. $\int_0^\pi \sin^2 s ds = \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2s}{2} ds = \frac{\pi}{2}$.
 47. Приравнивая коэффициенты при $\cos t$ и $\sin t$
 48. в (39) и (42), получаем
 49. $\begin{cases} q_1 = \mu q_1 \frac{\pi}{2} \\ q_2 = -\mu q_2 \frac{\pi}{2} \end{cases}$
 50. Рассмотрев возможные случаи: (а) $\mu = \frac{2}{\pi}$;
 51. (б) $\mu = -\frac{2}{\pi}$ и (в) μ не равен ни одному из чисел $\pm \frac{2}{\pi}$.

53 @ $\mu = \frac{2}{\pi} \Rightarrow$ ур-ние (49) ~~применяют~~ ~~буд~~

54
$$\begin{cases} q_1 = q_1 \\ q_2 = -q_2 \end{cases}$$

55
56. Значит, $q_2 = 0$, а q_1 - любое. Т.е. система
57 ур-ний (49)-(50) имеет ненулевое решение,
58 а вместе с тем и ур-ние (26) имеет
59 ненулевое решение $x(t) = q_1 \cos t$, где
60 постоянную q_1 можно выбрать так, чтобы $\|x\| = 1$,
61 т.е. так, чтобы $1 = \int_0^{\pi} q_1^2 \cos^2 t dt = q_1^2 \cdot \frac{\pi}{2}$ (см. (44)).

62 Поэтому можно взять $q_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Значит, ~~следует~~ (a)
63 даёт нам одно ~~характеристическое~~ ~~коррелированное~~ ~~значение~~
64 $(\mu = \frac{2}{\pi})$ и одну ~~соответствующую~~ ~~функцию~~ $(x = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos t)$.

65 (б) $\mu = -\frac{2}{\pi} \Rightarrow$ ур-ние (49)-(50) ~~применяют~~ ~~буд~~
66
$$\begin{cases} q_1 = -q_1 \\ q_2 = q_2 \end{cases}$$

67
68. Значит, $q_1 = 0$, q_2 - любое; $x(t) = q_2 \sin t$ -
69 ненулевое решение ур-ний (26). $x(t)$ будет
70 иметь единичную длину, если $q_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

71 Значит, ~~следует~~ (б) даёт нам ещё одно ~~харак-~~
72 ~~теристическое~~ ~~значение~~ $(\mu = -\frac{2}{\pi})$ и одну
73 ~~коррелированную~~ ~~соответствующую~~ ~~функцию~~ $(x(t) =$
74 $= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin t)$, соответствующую ~~такой~~ ~~характе-~~
75 ~~ристическому~~ ~~значению~~.

76 (в) $\mu \neq \pm \frac{2}{\pi}$. Тогда система (49)-(50) имеет
77 ~~буд~~ $\int (1 - \mu \frac{\pi}{2}) q_1 = 0$ ~~одно~~, но эта система
78 $\int (1 + \mu \frac{\pi}{2}) q_2 = 0$ ~~имеет~~ только нулевое

Решение. Значит, случай (б) не даёт
 ни одного характеристического значения
 (а значит, и ни одной собственной ф-ции)
 ур-ния (26): $x(t) - \mu \int_0^t x(s) \cos(t-s) ds = 0$.

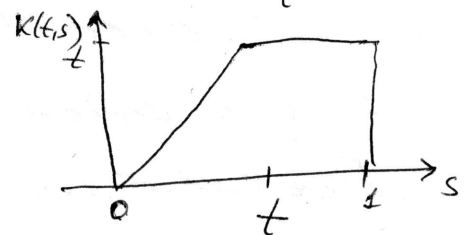
Задача 2: Найти характеристические значения и
 соответствующие собственные функции интегрального
 уравнения $x - \mu Ax = 0$, если оператор A задан
 формулой $(Ax)(t) = \int_0^1 \min(t, s) x(s) ds$.

Решение: Заметим, что A — оператор Тильберга-Шмидта
 с непрерывными ядром. Следовательно интегральное ур-ие
 $x - \mu Ax = 0$ — дифференциальное уравнение
 второго порядка непрерывно:

$$\frac{d}{dy} \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) dx + \beta'(y) f(\beta(y), y) - \alpha'(y) f(\alpha(y), y).$$

Продолжим в том, что в (88) непрерывная ф-ция
 не дифференцируема в точке $s = t$. Обозначим эту
 функцию так: $\int_0^1 \min(t, s) x(s) ds = \int_0^t s x(s) ds + \int_t^1 t x(s) ds$

Тогда ур-ие (88) имеет вид



$$x(t) - \mu \int_0^t s x(s) ds - \mu \int_t^1 t x(s) ds = 0.$$

Подставив $t=0$ найдём первое граничное условие: $x(0) = 0$

Диф-ие (98) с помощью (93), получаем

$$x'(t) - \mu t x(t) - \mu \int_t^1 x(s) ds + \mu t x(t) = 0$$

Подставив $t=1$, получаем второе граничное условие: $x'(1) = 0$

Диф-ие (101) с помощью (93), получаем

$$x''(t) + \mu x(t) = 0.$$

Как известно, общее решение этого ур-ния имеет вид
 гармоническое в виде $x(t) = C_1 e^{\sqrt{\mu}t} + C_2 e^{-\sqrt{\mu}t}$. Возьмем
 пока удовлетворим граничные значения (99) и (102)
 мы рассмотрим только в трех случаях: (а) $\mu > 0$;
 (б) $\mu = 0$, (в) $\mu < 0$.

а) $\mu > 0$. Тогда $x(t)$ можно записать в виде
 $x(t) = C_1 \cos \sqrt{\mu}t + C_2 \sin \sqrt{\mu}t$ (где постоянные C_1 и C_2 не
 обязаны совпадать с постоянными в г-е (106)). Значит,
 $x(0) = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0$. Тогда
 $x'(1) = 0 \Leftrightarrow C_2 \sqrt{\mu} \cos \sqrt{\mu} = 0 \Leftrightarrow \cos \sqrt{\mu} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\mu} = \frac{\pi}{2} + \pi k$,
 где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Значит, $\mu_k = \pi^2 \left(k + \frac{1}{2}\right)^2$ и $x_k(t) = C_2 \sin \pi \left(k + \frac{1}{2}\right)t$.

Постоянную C_2 найдем из условия нормирования:

$$1 = \|x_k\|^2 = C_2^2 \int_0^1 \sin^2 \pi \left(k + \frac{1}{2}\right)t dt = C_2^2 \int_0^1 \sin^2 \frac{\pi}{2}t dt = C_2^2 \int_0^1 \frac{1 - \cos \pi t}{2} dt =$$

$$= C_2^2 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow C_2 = \sqrt{2}.$$

Значит, случаи (а) дает нам бесконечное множество
 различных значений $\mu_k = \pi^2 \left(k + \frac{1}{2}\right)^2$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$
 и каждому из них соответствует одна нормированная
 собственная функция $x_k(t) = \sqrt{2} \sin \pi \left(k + \frac{1}{2}\right)t$.

б) $\mu = 0$. Тогда ур-ние (104) принимает вид
 $x''(t) = 0$. Одним из его решений
 таков: $x(t) = C_1 t + C_2$. Попробуем удовлетворить граничным
 условиям (99) и (102):

$$x(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0.$$

$$x'(1) = 0 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Значит, в случае (б) нет ненулевых решений
 нулевого решения для ур-ния (104), а значит, $\mu = 0$.

132 не является характеристическим значением урав-
 133 $x - \mu Ax = 0$.
 134 (б) $\mu < 0$. Тогда $x(t) = C_1 e^{\sqrt{-\mu}t} + C_2 e^{-\sqrt{-\mu}t}$ (см. (106))
 135 попытаться удовлетворить граничным условиям:
 136 $x(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1$
 137 $x'(1) = 0 \Rightarrow C_1 \sqrt{-\mu} e^{\sqrt{-\mu}} - C_2 \sqrt{-\mu} e^{-\sqrt{-\mu}} = 0 \Rightarrow$
 138 $C_1 \sqrt{-\mu} (e^{\sqrt{-\mu}} + e^{-\sqrt{-\mu}}) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$.
 139 Значит, в случае (б) мы имеем только тривиальное
 140 решение для уравнения (104) (т.е. $x''(t) + \mu x(t) = 0$)
 141 с граничными условиями (99) (т.е. $x(0) = 0$)
 142 и (102) (т.е. $x'(1) = 0$). Следовательно, ни одно из
 143 чисел $\mu < 0$ не является характеристическим
 144 значением уравнения $x - \mu Ax = 0$.

145 Отв и задание 2: $\mu_k = \pi^2 \left(k + \frac{1}{2}\right)^2$, $k = 0, 1, 2, \dots$
 146 $x_k(t) = \sqrt{2} \sin\left(\pi\left(k + \frac{1}{2}\right)t\right)$, $k = 0, 1, 2, \dots$

147 Вопросы к выполненному решению задания 2:

- 148 (i) Почему в (115) написано $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$,
 149 а в (121) и (145) уже написано $k = 0, 1, 2, \dots$?
 150 (ii) Почему разбирая случаи (а), (б) и (в) мы не
 151 стали рассуждать о случае, когда μ — комплекс-
 152 ное число, не являющееся действительным?

153 Задание 3: Найти характеристические значения и ^{нормиро-}собственные функции ^{ованные} интегрального уравнения
 154 $x(t) - \mu \int_0^1 K(t,s) x(s) ds = 0$,
 155 где $K(t,s) = \begin{cases} t(s-1), & \text{если } 0 \leq t \leq s; \\ s(t-1), & \text{если } s \leq t \leq 1. \end{cases}$

157 | Сделайте позу и решите задачу сами.

158 Ордер κ задан 3: $\mu_\kappa = -\pi^2 \kappa^2$; $\kappa = 1, 2, \dots$;

159 $x_\kappa(t) = \sqrt{2} \sin \pi \kappa t$.

160 Решение: Известно, что ядро $K(t,s)$ симметричное и

161 интегрируемое с квадратом (а значит, выполняется закон-

162 ченое теорема (20)).

163 Сведем интегральное ур-ние (155) к дифференциальному

164 с помощью явным (93) групп-ым интегралом, завися-

165 щим от параметра:

166 $(155) \Leftrightarrow x(t) - \mu \int_0^1 K(t,s) x(s) ds = 0 \Leftrightarrow$

167 $x(t) - \mu \int_0^t s(t-1) x(s) ds - \mu \int_t^1 t(s-1) x(s) ds = 0 \Leftrightarrow$

168 $x(t) - \mu \int_0^1 ts x(s) ds + \mu \int_0^t s x(s) ds + \mu t \int_t^1 x(s) ds = 0.$

169 Дифференцируем по t

170 $x'(t) - \mu \int_0^1 s x(s) ds + \mu t x(t) + \mu \int_t^1 x(s) ds - \mu t x(t) = 0$

171 Еще раз дифференцируем:

172 $x''(t) - \mu x(t) = 0.$

173 Находим граничные условия. Для этого подставим в (164)

174 $t=0$ и $t=1$:

175 $t=0 \Rightarrow x(0)=0$;

176 $t=1 \Rightarrow x(1)=0.$

177 Значит, нам нужно найти решение ур-ния (172),

178 удовлетворяющее граничным условиям (175) и (176).

179 Рассмотрим по отдельности 3 случая: (а) $\mu > 0$;

180 (б) $\mu = 0$, (в) $\mu < 0$.

181 а) $\mu > 0 \Rightarrow$ Общее решение ур-ния (172) имеет

182 вид заданное в виде $x(t) = C_1 e^{\sqrt{\mu} t} + C_2 e^{-\sqrt{\mu} t}$.

183 $x(0)=0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1$

184 $x(1)=0 \Rightarrow C_1 e^{\sqrt{\mu}} + C_2 e^{-\sqrt{\mu}} = 0 \Rightarrow C_1 (e^{\sqrt{\mu}} - e^{-\sqrt{\mu}}) = 0$

$$\Rightarrow C_1 e^{-\sqrt{\mu}} (e^{2\sqrt{\mu}} - 1) = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

Значит ни одно из чисел $\mu > 0$ не является характеристическим значением ~~этого~~ эгр K .

⑤ $\mu = 0 \Rightarrow$ Ур-ние (172) (т.е. $x''(t) - \mu x(t) = 0$) имеет вид $x''(t) = 0$. Его общее решение является $x(t) = C_1 t + C_2$.

$$x(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$x(1) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow \mu = 0 \text{ не является характеристическим значением}$$

⑥ $\mu < 0 \Rightarrow$ Общее решение ур-ния (172) имеет вид $x(t) = C_1 \cos \sqrt{-\mu} t + C_2 \sin \sqrt{-\mu} t$.

$$x(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$x(1) = 0 \Rightarrow C_2 \sin \sqrt{-\mu} = 0$$

Значит ненулевое решение ($C_2 \neq 0$) имеет вид $\sin \sqrt{-\mu} = 0$, т.е. если $\sqrt{-\mu} = \pi k$, $k = 0, \pm 1, \dots$

Следовательно, $\mu_k = -\pi^2 k^2$. Значение $k = 0$ отбрасываем, т.к. в рассматриваемом случае $\mu < 0$. Из двух значений k и $-k$ оставляем только одно, т.к.

$$\mu_k = \mu_{-k}$$

Итак, все ненулевые характеристические значения $\mu_k = -\pi^2 k^2$, $k = 1, 2, \dots$ Каждому из них соответствует собственная ф-ция эгр K (см. (194)): $x_k(t) = C_2 \sin \sqrt{-\mu_k} t$.

$$\text{Постоянную } C_2 \text{ найдем из условия: } 1 = \|x_k\|^2 = \int_0^1 C_2^2 \sin^2 \pi k t dt = C_2^2 \int_0^1 \frac{1 - \cos 2\pi k t}{2} dt = C_2^2 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow C_2 = \sqrt{2}.$$

Ответ к заданию 3: см. (158) - (159).

Вопросы по дополнительным решениям задания 3:

(i) можно ли в (207) взять $C_2 = -\sqrt{2}$? Почему?

(ii) правда ли, что собственные ф-ции $x_k(t)$, отвечающие различным μ_k , ортогональны друг другу? (см. г-цу (20)).