213 В пункте 8.6 лекций мы вывели следующую

214 формулу

215 $$x(t) = f(t) + \mu \sum_n \frac{x_n(t)}{\mu_n - \mu} \int_a^b f(s)\overline{x_n(s)}\,ds,$$

216 называемую разложением решения $x(t)$

217 интегрального уравнения $x - \mu A x = f$ по ортонормированным собст-

218 венным функциям $x_n(t)$ ядра $K(t,s)$. Здесь A - интеграль.

219 оператор Гильберта-Шмидта с симметричным ядром K,

220 а μ_n - характеристическое значение ядра $K(t,s)$,

221 отвечающее собственной функции $x_n(t)$, т.е. $x_n(t) - \mu_n A x_n = 0$.

222 <u>Задача 4</u> Найти разложение решения интегрального

223 уравнения $x(t) - \mu \int_0^\pi \cos(t-s)\,x(s)\,ds = f(t)$ по

224 собственным функциям ядра. Используя это разло-

225 жение найти решение для $f(t) = \cos t$.

226 Пауза для самостоятельного решения задачи 4.

227 <u>Ответ</u> к задаче 4: $x(t) = f(t) + \mu \dfrac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos t}{\frac{2}{\pi} - \mu} \int_0^\pi \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(s)\cos s\,ds \,-$

228 $-\mu \dfrac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin t}{\frac{2}{\pi} + \mu} \int_0^\pi \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(s)\sin s\,ds$; $x(t) = \dfrac{2 + \pi(2\pi - 1)\mu}{2 - \pi\mu}\cos t.$

229 <u>Решение</u>: В задаче 1 мы уже нашли характе-

230 ристические числа ядра $K(t,s) = \cos(t-s)$: $\mu_1 = \frac{2}{\pi}$,

231 $x_1(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos t$ - нормированная собственная ф-ция ядра $K(t,s)$, отвечающая

232 характеристическому значению μ_1; $\mu_2 = -\frac{2}{\pi}$, $x_2(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin t$

233 (см. строки (28)-(29)).

234 Подставив эти выражения в (215), получим (227)-(228).

235. Если $f(t) = \cos t$, то $\int_0^\pi f(s)\cos s\,ds = \int_0^\pi \cos^2 s\,ds = \frac{\pi}{2}$ (см. (44))

236 а $\int_0^\pi f(s)\sin s\,ds = \int_0^\pi \cos s \sin s\,ds = 0$ (см. (45)).

237 Поэтому в случае $f(t)=\cos t$, ф-ла (227)-(228)

238 даёт $x(t) = \cos t + \mu \dfrac{\frac{2}{\pi}\cos t}{\frac{2}{\pi}-\mu}\cdot\pi^2 = \dfrac{2+\pi(2\pi-1)\mu}{2-\pi\mu}\cos t.$

239 Задача 5: Найти разложение решения интегрального

240 уравнения

241 $$x(t)-\mu\int_0^1 \min(t,s)\,x(s)\,ds = f(t)$$

242 по собственным функциям ядра. Используя это

243 разложение, найти решение ур-ния (241) для $f(t)=1$.

244 | Пауза для самостоятельного решения.

245 Ответ: $x(t) = f(t) + \mu\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sqrt{2}\sin\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\pi^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-\mu}\int_0^1\sqrt{2}\,f(s)\sin\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)s\,ds,$

246 $x(t) = 1+2\mu\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\left[\pi^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-\mu\right]}\sin\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)t.$

247. Решение задачи 5: При решении задачи 2 мы уже

248 нашли характеристические значения $\mu_n = \pi^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$,

249 $n=0,1,2,\ldots$ и соответствующие нормированные

250 собственные функции $x_n(t)=\sqrt{2}\sin\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)t$ ядра

251 $K(t,s)=\min(t,s)$.

252 Подставив эти выражения в (215), получим (245).

253 Если $f(t)=1$, то $\int_0^1 f(s)\sin\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)s\,ds = \int_0^1\sin\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)s\,ds =$

254 $= -\dfrac{1}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\cos\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)s\Big|_{s=0}^{s=1} = -\dfrac{1}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\Big[\underbrace{\cos\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}_{=0}-1\Big] =$

255 $= \dfrac{1}{\pi\left(n+1/2\right)}$. Подставив значения этих интегралов в (245),

256 получим (246).

257 <u>Задача 6</u>: Найти разложение решения интегрального

258 уравнения $x(t) - \mu \int_0^1 K(t,s)\, x(s)\, ds = f(t)$

259 по собственным функциям ядра

260 $$K(t,s) = \begin{cases} t(s-1), & \text{если } 0 \le t \le s; \\ s(t-1), & \text{если } s \le t \le 1. \end{cases}$$

261 Используя это разложение, найти решение ур-ия (258)

262 для $f(t) = 1$.

263 Пауза для самостоятельного решения.

264. <u>Ответ</u> к задаче 6: $x(t) = f(t) - \mu \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{2}\sin \pi n t}{\pi^2 n^2 + \mu} \int_0^1 f(s)\sqrt{2} \sin \pi n s\, ds$;

265 $$x(t) = 1 - \frac{4\mu}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \pi (2k+1) t}{(2k+1)\left[\pi^2 (2k+1)^2 + \mu\right]}.$$

266 <u>Решение</u>: В задаче 3 мы уже нашли характеристи-

267 ческие числа $\mu_n = -\pi^2 n^2$, $n = 1, 2, \ldots$ и нормированные

268 собственные функции $x_n(t) = \sqrt{2} \sin \pi n t$ ядра (260).

269 Подставив эти выражения в (215), получим (264).

270 Если $f(t) = 1$, то $\int_0^1 f(s) \sin \pi n s\, ds = \int_0^1 \sin \pi n s\, ds =$

271 $$= -\frac{1}{\pi n} \cos \pi n s \Big|_{s=0}^{s=1} = -\frac{1}{\pi n}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ - чётное} \\ \dfrac{2}{\pi n}, & \text{если } n \text{ - нечётное} \end{cases}$$

ведь $n \neq 0$

272 Подставив значение этого интеграла в (264) и

273 записав нечётное n в виде $n = 2k + 1$, получим

274 (265).

Программа семинаров весеннего семестра 2020 года выполнена полностью.