Вопросы, вынесенные на экзамен по
«Основам функционального анализа».
Летняя сессия. Июнь 2020 г.

Комментарий: Вопросы, вынесенные на экзамен по «Основам функционального анализа» в точности соответствуют разделам, рассказанным на лекциях (с сохранением нумерации). Конспекты лекций за февраль – май 2020 года выложены на сайте кафедры, а именно:
конспекты лекций 1-8 выложены на страинце http://www.phys.nsu.ru/aleksandrov/teaching.html
конспекты лекций 9-16 – на странице http://www.phys.nsu.ru/aleksandrov/video-lectures.html

§5. Геометрия пространств со скалярным произведением

5.1. Линейные пространства: Определение и примеры линейных пространств. Определение линейно независимых векторов. Определение размерности пространства. Примеры конечномерных и бесконечномерных линейных пространств. Определение и примеры подпространств.

5.2. Нормированные линейные пространства: Дать определение нормы. Привести примеры норм в пространствах R^n, l_2 и $C[a,b]$. Дать определение сходящейся последовательности и предельной точки множества. Дать определение замкнутого и плотного множеств. Привести примеры замкнутых и незамкнутых, плотных и неплотных множеств. Дать определение сепарабельного пространства и привести примеры таких пространств. Доказать, что если последовательность имеет предел, то он единственный. Привести пример незамкнутого подпространства в бесконечномерном линейном пространстве. Дать определение фундаментальной последовательности. Привести пример, что нельзя утверждать, что во всяком номрированном пространстве всякая фундаментальная последовательность является сходящейся. Дать определение полного нормированного пространства. Дать определение лебеговского функционального пространства $L_p(D)$. Сформулировать свойства лебеговских пространств: неравенство Гёльдера (привести идею доказательства), неравенство Минковского (без доказательства), полнота и сепарабельность (без доказательства).

5.3. Линейные пространства со скалярным произведением: Дать определение пространства со скалярных произведением и привести примеры таких пространств. Сформулировать и доказать неравенство Коши-Буняковского. Доказать, что формула $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ задаёт норму в линейном пространстве со скалярным произведением. Доказать, что скалярное произведение непрерывно по первому аргументу. Сформулировать и доказать равенство параллелограмма. Дать определение и привести примеры гильбертовых пространств.

5.4. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта: Дать определение ортогональных векторв. Дать определение угла между векторами. Сформулировать и доказать теорему о процессе ортогонализации Грама-Шмидта.

5.5. Приближение векторами подпространства и ортогональное проектирование: Дать определение вектора наилучшего приближения. Сформулировать и доказать лемму о существовании и единственности вектора наилучшего приближения. Дать определение ортогональной проекции вектора на подпространство. Сформулировать и доказать лемму об эквивалентности понятий “ортогональная проекция” и “вектор наилучшего приближения”. Дать определение ортогонального дополнения к подпространству и прямой суммы подпространств. Првести соответствующие примеры. Сформулировать и доказать теорему о разложении гильбертова пространства в прямую сумму замкнутого подпространства и его ортогонального дополнения.

5.6. Проектирование на конечномерное подпространство и неравенство Бесселя: Сформулировать и доказать теорему о проекции на конечномерное подпространство. Дать определение коэффициента Фурье и ряда Фурье вектора из гильбертова пространства. Сформулировать и доказать неравенство Бесселя.

5.7. Полнота ортонормированной системы. Равенство Парсеваля. Замкнутые ортонормированные системы. Гильбертов базис. Критерий полноты ортонормированной

системы: Дать определение полной системы, гильбетрова базиса и замкнутой системы. Сформулировать и доказать критерий полноты ортонормированной системы. Сформулировать равенство Парсеваля. Сформулировать теорему о существовании гильбертова базиса (без доказательства).

5.8. Теорема Рисса-Фишера. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств: Сформулировать и доказать теорему Рисса-Фишера о существовании и едиственности вектора с заданными коэффициентами Фурье. Дать определение изоморфности гильбертовых пространств. Сформулировать и доказать теорему об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.

5.9. Тригонометрическая система функций как пример полной ортонормированной системы в $L_2[-\pi,\pi]$ **.**

§6. Ортогональные многочлены

6.1. Ортогональные многочлены как результат ортогонализации последовательности мономов: Дать определение весовой функции и весового пространства Лебега. Сформулировать (без доказательства) лемму о том, что весовое пространство Лебега является гильбертовым пространством. Дать определение последовательности ортогональных многочленов.

6.2. Общие свойства ортогональных многочленов: Сформулировать и доказать шесть свойств ортогональных многочленов, включая трёхчленную рекуррентную формулу.

6.3. Свойства нулей ортогональных многочленов: Сформулировать теорему о том, что нули ортогональных многочленов вещественны, просты и лежат в промежутке ортогональности. Сформулировать (без доказательства) теорему о том, что нули ортогональных многочленов чередуются.

6.4. Классические ортогональные многочлены: Дать определение семи классических ортогональных многочленов. Дать определение стандартизации ортогональных многочленов. Привести примеры стандартизаций. Дать определение производящей функции. Дать обзор основных свойств классических ортогональных многочленов (без доказательства), в частности, – написать уравнение Пирсона, написать формулу Родгига и сформулировать утверждение о наличии производящей функции, выражаемой через элементарные функции.

6.5. Многочлены Лежандра: Производящая функция и рекуррентные соотношения: Дать определение многочленов Лежандра $P_n(x)$, стандартизованных с помощью производящей функци. Вывести трёхчленную рекуррентную формулу. Доказать, что так определённые $P_n(x)$ действительно являются многочленами степени n с положительными старшими коэффициентами. Доказать вторую рекуррентную формулу для $P_n(x)$.

6.6. Многочлены Лежандра: Дифференциальное уравнение и соотношения ортогональности: Вывести дифференциальное уравнение для многочленов Лежандра. Доказать, что многочлены Лежандра с разными номерами ортогональны друг другу. Найти норму многочлена $P_n(x)$.

6.7. Формула Родрига. Теорема о представимости функции в точке её рядом по многочленам Лежандра: Сформулировать без доказательства обе эти теоремы. Для формулы Родрига привести идею доказательства. Для теоремы о представимости пояснить почему она “почти очевидна”.

6.8. Мультипольное разложение кулонова потенциала: Вывести соответствующую формулу. Написать формулы для полного заряда, дипольного и квадрупольного моментов.

§7. Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах

7.1. Линейные операторы и их общие свойства: Дать определение линейного оператора. Привести примеры линейных операторов. Сформулировать и доказать, что линейная комбинация и суперпозиция линейных операторов снова являются линейными операторами.

7.2. Непрерывные и ограниченные операторы: Дать определение непрерывного оператора, ограниченного множества и ограниченного оператора. Сформулировать и доказать теорему о непрерывных и ограниченных операторах.

7.3. Норма оператора: Сформулировать и доказать лемму о трёх выражениях, задающих норму оператора. Дать определение нормы оператора. Сформулировать и доказать теорему о шести свойствах нормы оператора.

7.4. Сходимость операторов и операторные ряды: Дать определение сходящейся последовательности опреаторов. Сформулировать и доказать два свойства сходящихся последовательностей операторов. Дать определение фундаментальной последовательности операторов. Сформулировать (без доказательства) теорему о полноте пространства опреаторов. Дать определение операторного ряда и его суммы. Сформулировать и доказать два свойства сходящихся операторных рядов.

7.5. Обратимость оператров и обратный оператор: Дать определение обратимого оператора и образа оператора. Доказать, что образ оператора является подпространством. Дать определение обратного оператора. Сформулировать и доказать четыре свойства обратного оператора.

7.6. Теорема Неймана: Сформулировать и доказать теорему Неймана.

7.7. Спектр оператора: Дать определение резольвентного множества $\rho(A)$, спектра $\sigma(A)$, точечного спектра $\sigma_p(A)$, непрерывного спектра $\sigma_c(A)$ и остаточного спектра $\sigma_r(A)$ ограниченного оператора A. Сформулировать и доказать три свойства спектра оператора.

7.8. Линейные функционалы: Дать определение и привести пример линейного функционала. Дать определение ядра линейного функционала. Сформулировать и доказать три свойства линейных функционалов, связанных с понятием ядра.

7.9. Сопряжённое пространство. Теорема Рисса: Дать определение сопряжённого пространства. Сформулировать и доказать теорему Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала.

7.10. Бра- и кет-векторы: Дать определение бра- и кет-векторов. Привести примеры разложения тождественного оператора и нахождения резольвентного оператора с использованием бра- и кет- обозначений.

7.11. Оператор, сопряжённый к ограниченному: Дать определение оператора, сопряжённого к данному. Сформулировать и доказать шесть свойств сопряжённого оператора.

7.12. Применение сопряжённого оператора к нахождению спектра: Сформулировать и доказать теорему о применении сопряжённого оператора к нахождению спектра.

7.13. Ограниченные самосопряжённые операторы: Дать определение самосопряжённого оператора. Сформулировать и доказать теорему о точечном спектре самосопряжённого оператора. Дать определение инвариантного подпространства оператора. Привести примеры инвариантных подпространств. Сформулировать и доказать терему об инвариантном подпространстве. Сформулировать (без доказательства) теорему о норме самосопряжённого оператора.

7.14. Компактные оператры: Дать определение компактного оператора. Сформулировать и доказать шесть свойств, связанных с понятием компактного оператора. Сформулировать (без доказательства) теорему о существовании базиса, состоящего из собственных векторов компактного самосопряжённого оператора.

§8. Интегральные уравнения

8.1. Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра и задачи, к ним приводящие: Дать определение интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра I и II рода. Доказать, что уравнение Вольтерра является частным случаем уравнеия Фредгольма. Привести пример сведЕния начальной задачи для линейного дифференциального уравнения к интегральному уравнению.

8.2. Интегральный оператор Гильберта-Шмидта: Дать определение оператора Гильберта-Шмидта. Сформулировать и доказать теорему о линейности, норме и компактности оператора

Гильберта-Шмидта. Сформулировать и доказать теорему об операторе, сопряжённом к оператору Гильберта-Шмидта.

8.3. Решение интегральных уравнений с вырожденным ядром.

8.4. Альтернатива Фредгольма: Сформулировать альтернативу Фредгольма для интегральных уравнений и доказать её для интергральных уравнений с вырожденным ядром.

8.5. Решение интегральных уравнений с малым параметром: вывести ряд Неймана и изложить метод последовательных приближений. Дать определение повторного ядра. Сформулировать и доказать теорему о повторном ядре оператора Гильберта-Шмидта. Дать определение резольвентного ядра. Записать решение интегрального уравнения с малым параметром через резольвентное ядро.

8.6. Теорема Гильберта-Шмидта для интегральных уравнений с симметричным ядром: Дать опрелеление функции, представимой через ядро. Сформулировать и доказать теорему Гильберта-Шмидта для интегральных уравнений с симметричным ядром. Написать разложение решения интегрального уравнения по собственным функциям ядра.

8.7. Разложение повтрного ядря по собственным функциям ядра. Билинейная формула: Сформулировать и доказать теорему о разложении повторного ядра, называемую также билинейной формулой. Сформулировать (без доказательства) теорему Мерсера.

Составил В.А. Александров
8 июня 2020 г.