

Основы функционального анализа
Александров Александр Викторович

07.09.20 Лекция 1

- Бельжеский пример и задачи
 Φ - "называют"

1.1. Задача о разложении функции в ряд Фурье

В мат. анализе изучают функциональные ряды $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ и частный случай - степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

[Опр] Функция в ряд $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$
 Φ тригонометрическим рядом

Задача: Можно ли данную ф-цию:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ разложить в тригонометр. ряд
и т.е. найти коэф. a_n, b_n такие, чтобы

$\forall x \in \mathbb{R}$ имело место равенство

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)?$$

Если можно, то как? $\uparrow$
формула (1)

Замечание

① Если ф-ла (1) верна, то $f(x)$ является ян периодической функцией, т.к. тригонометрический ряд из (1) — 2π -период. ф-ция

② Если ф-ла (1) верна, то её достаточно проверить на любом промежутке длиной 2π

Например, на $[0, 2\pi]$ или $[-\pi, \pi]$

③ Как искать a_n, b_n ? / напомним себе обратные условия Каранье на a_0, a_n, b_n , т.к. основной объект

Предположим, что (1) имеет место

Принимая ряд можно интегрировать почленно.

$$\textcircled{a} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right)$$

$\frac{a_0 \cdot \pi}{2}$ $\frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$ $-\frac{\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{(-1)^n - 1}{n} = 0$

↓

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

 ← ф-ла (2)

6) Найдем a_n (найдем $a_m, m \geq 1$,
 функции a_n на $\cos mx$ и $\int_{-\pi}^{\pi}$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx = \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos mx \, dx}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx}_0 + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx}_0 \right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (\cos(m+n)x + \cos(m-n)x) \, dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{2\pi}{2}, & m = n \end{cases}$$

$m+n \geq 2 \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x \, dx = 0$; $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2\pi, & m = n \end{cases}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m+n)x \, dx}_0 + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m-n)x \, dx}_0 \right) = 0$$

$m, n \quad m+n \geq 2$

$= \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 0, & m = n \end{cases}$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx \quad m \geq 1$$

a_n (3)

Аналогично найдем b_m функции
 (1) на $\sin mx$:

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx, \quad m \geq 1 \quad \text{ф-ла (4)}$$

[Опр] Формулы 2-й и формулы Фурье - Гурье

• Зам. (2) - частный случай ф-лы (3) при $m=0$, поэтому и $\frac{a_0}{2}$, а не просто a_0 .

Если дана 2π -периодическая функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, то мы найдем по ней a_n и b_n по ф-лам (3) и (4), а затем построим тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

(не понятно сходится он или нет) и равен ли он $f(x)$

такой ряд $\neq$ формальным рядом Фурье функции $f(x)$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Если покажется, что формальный ряд Фурье сходится и его сумма равняется $f(x)$, то пишут

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \text{ и}$$

и этот ряд ряд Фурье функции

1.2. Разложение функции с произвольным периодом

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — 2ℓ -периодическая функция, где $\ell > 0$

Делаем линейную замену переменных:

$$x = \frac{y}{\pi} \cdot \ell, \quad y \in \mathbb{R} \quad \left(\begin{array}{l} \text{длина} \\ \text{одн.-периода} \\ \text{функции} \end{array} \right)$$

Построим новую функцию:

$$g(y) = f(x) = f\left(\frac{y \cdot \ell}{\pi}\right)$$

Функция $g(y)$ является 2π -периодической,

$$\text{т.к. } g(y + 2\pi) = f\left(\frac{\ell(y + 2\pi)}{\pi}\right) = f\left(\frac{\ell y}{\pi} + 2\ell\right) = f\left(\frac{\ell y}{\pi}\right)$$

$$\Leftrightarrow g(y)$$

т.к. f — 2ℓ -периодическая

Подставим

$$g(y) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos ny + b_n \sin ny), \text{ где}$$

a_n и b_n находятся по формулам (3) и (4) из 4.1

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \cos ny \, dy$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \sin ny \, dy$$

Перейдем от переменных y к
переменной x

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} \cdot \frac{\pi}{l} \, dx$$

аналогично

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \sin \frac{\pi n x}{l} \, dx$$

1.3. Разложение только по синусам
или только по косинусам

Итак пусть f -четная функция
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда $\forall a > 0$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Докажем эту ф-лу:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx =$$

↑
замена $x = -x$

$$= - \int_0^a \underbrace{f(x)}_{f(x)} dx + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

↑
т.к. f - четная

Аналогично для нечетной f -функции f
имеем $\forall a > 0 \quad \int_{-a}^a f(x) dx = 0$ (гип)

II шаг

Пусть f - непрерывная
четная функция.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{\text{чет}} \underbrace{\cos nx}_{\text{чет}} dx \stackrel{I \text{ шаг}}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{\text{чет}} \underbrace{\sin nx}_{\text{нечет}} dx = 0 \quad (\text{неопределенная интеграл четная})$$

$$\Rightarrow f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

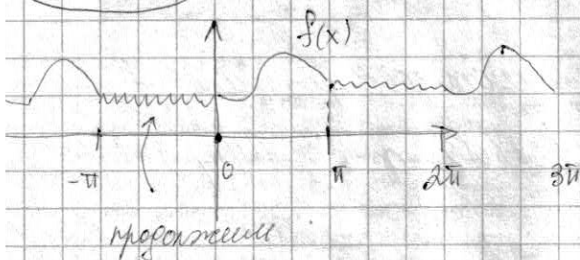
Аналогично: если $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
нечетная f - непрерывная функция,
то $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{\text{нечет}} \underbrace{\cos nx}_{\text{чет}} dx \stackrel{I \text{ шаг}}{=} 0$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{\text{нечет}} \cdot \underbrace{\sin nx}_{\text{нечет}} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

II шаг

пусть $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$

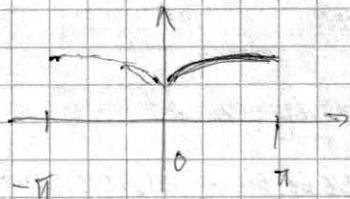


← Превратим f в 2π -периодическую функцию

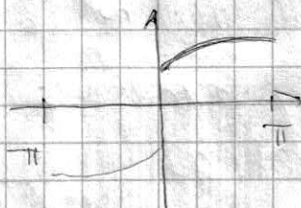
и если f не определена для продолжения функции, то на $[0, \pi]$ получим разрыв f

Из многих способов продолжения f до 2π -периодической выделяются 2, приводящие к наиболее короткому ответу.

1. Продолжим четным образом



2. Продолжим нечетным образом



$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

↑
формулы разложения
функции в ряд Фурье только
по косинусам или только по
синусам

1.4) лемма Римана - Лебега для
конечного промежутка

[Опр] Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ абсолютно интегриру-
ема по промежутку $(a, b) \subset \mathbb{R}$,
если $\int_a^b f(x) dx$ существует и конечен.

и абсолютно интегрируема на
 $(a, b) \subset \mathbb{R}$ если $\int_a^b |f(x)| dx$ существует и
конечен.

лемма (Римана - Лебега для конечного
промежутка)

Если $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ является
абсолютно интегрируемой, тогда
 $\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \cos px dx = 0$

Замечание

1) Хотелось бы человека указать
как автор?

Эта лемма справедлива и
для интеграла Римана, и для
интеграла Лебега

2) $\int_a^b f(x) \cos px \, dx$ существует, т.к.
т.к. $|\cos px| \leq 1$

$$\left| \int_a^b f(x) \cos px \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x) \cos px| \, dx \leq$$

$$\leq \int_a^b |f(x)| \, dx < +\infty, \text{ т.е. существует и конечн.}$$

по условию леммы

Доказ.

Упр I Сначала рассмотрим случай,
когда f непрерывно дифференциру-

ема: $\left| \int_a^b f(x) \cdot \cos px \, dx \right| = \left| \frac{1}{p} \int_a^b f(x) \, d(\sin px) \right| =$

$$= \frac{1}{p} \left(\left[f(x) \sin px \right]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x) \sin px \, dx \right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{p} \left(\overset{\text{const}}{|f(b)|} + \overset{\text{const}}{|f(a)|} + \int_a^b \overset{\text{const отсюда } p}{|f'(x)|} \, dx \right) = \frac{1}{p} \cdot \text{const} \rightarrow 0$$

$\sin px$ — ограничен
 f' — непр. и $[a, b]$ — компакт
а любая непр. функция непрерывна на компактном промежутке

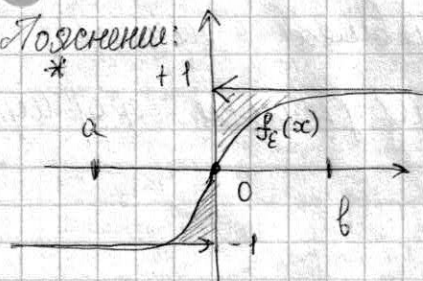
Шаг II Если f - произвольная абсолютно интегрируемая функция. Тогда будем использовать утв.:

* Если $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ абсолютно интегрир., то $\forall \varepsilon > 0 \exists f_\varepsilon: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ - непр. дюр и

$$\int_a^b |f(x) - f_\varepsilon(x)| dx < \varepsilon \quad (\text{без док-ва})$$

не является непрерывной

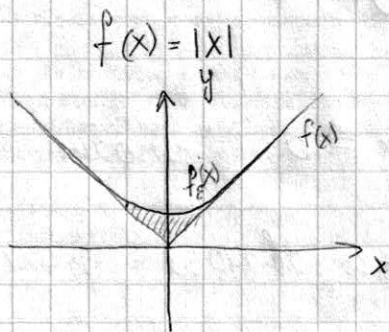
Пояснение:



$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$a < 0, b > 0$$

$$\square = \int_a^b |f(x) - f_\varepsilon(x)| dx$$



Фиксируем $\varepsilon > 0$. Найдем функцию f_ε как в утверждении. Тогда

$$\left| \int_a^b f(x) \cos px dx \right| = \left| \int_a^b (f(x) + f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x)) \cos px dx \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |f(x) - f_\varepsilon(x)| dx + \underbrace{\left| \int_a^b f_\varepsilon(x) \cos px dx \right|}_{\rightarrow 0 \text{ по лемме I}}$$

↑
неравенство

$$\Delta$$

$$|f| \leq S_1$$

$$|\cos px| \leq 1$$

$\xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ по лемме I

по определению предела
выбираю такое p , при
котором для фиксир. ε интеграл
 $< \varepsilon$

$$< \underbrace{\varepsilon} + \underbrace{\varepsilon}_{\text{по лемме I}} = 2\varepsilon$$

Итого.

Замечание: В условиях леммы

P.-Л. справедливо следующее формулы

$$\textcircled{1} \lim_{p \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) \cos px dx = 0$$

$$\textcircled{2} \lim_{p \rightarrow \pm \infty} \int_a^b f(x) \sin px dx = 0$$

$$\textcircled{3} \lim_{p \rightarrow \pm \infty} \int_a^b f(x) e^{\pm ipx} dx = 0, \text{ чтобы}$$

проверить, надо воспользоваться ф-лой

$$\text{Эйлера } e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$$

и интеграл распадается на два -
с синусом и косинусом

1.5) Формальное Дирихле

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - 2π -периодическая
и $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < +\infty$. Построим по
формулам Фурье-Дирихле коэф.
Фурье функции f :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt \quad n=0, 1, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt \quad n=1, 2, \dots$$

и можем построить формальный
ряд Фурье функции f :

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Поставим главный вопрос: сходится ли этот
ряд и равна ли его сумма функции $f(x)$?

Обозначим через $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$
- частичную сумму ряда

Терминированный вопрос:
Верно ли что $S_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$

$$f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m \cos mx + b_m \sin mx) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mt dt \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin mt dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos mt \cdot \cos mx + \sin mt \sin mx \right] dt =$$

используем
линейность
интеграла и
конечность
суммы

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos m \overbrace{(t-x)}^{\Delta} \right] dt \Leftrightarrow$$

Найдём сумму $\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos m \Delta$.

Для этого воспользуемся тригонометр. формулой.

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Из неё получаем:

$$\sin \frac{\Delta}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \frac{\Delta}{2}$$

$$\sin \frac{3\Delta}{2} - \sin \frac{\Delta}{2} = \cos \Delta \cdot 2 \sin \frac{\Delta}{2}$$

$$\sin \frac{5\Delta}{2} - \sin \frac{3\Delta}{2} = \cos 2\Delta \cdot 2 \sin \frac{\Delta}{2}$$

⊕

$$\left[\sin \frac{2n+1}{2} \alpha - \sin \frac{2n-1}{2} \alpha = \cos n\alpha \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2} \right]$$

$$\sin \frac{2n+1}{2} \alpha = \left(\frac{1}{2} + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha \right) 2 \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos m\alpha = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} \alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(t-x)}{2 \sin \frac{t-x}{2}} dt \Leftrightarrow$$

Это интеграл Дирхле. Сделаем в нём замену $t-x = z$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(z+x) \frac{\sin \left(\frac{2n+1}{2} \cdot z \right)}{\sin \frac{z}{2}} dz =$$

Эта периодическая функция, поэтому можно взять любой промежуток интегрирования, равный 2π

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z+x) \frac{\sin \left(\frac{2n+1}{2} \cdot z \right)}{\sin \frac{z}{2}} dz =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(z+x) D_n(z) dz, \text{ где } D_n(z) = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} z}{2\pi \sin \frac{z}{2}}$$

ядро Дирхле

Свойства ядра Дирихле:

1. D_n - четная функция, т.е. $D_n(-z) = D_n(z) \quad \forall z$

2.
$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(z) dz = 1 \quad \forall n$$

$\Leftrightarrow$ Мы получим его из формулы

$$D_n(z) = \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos mz \right) \cdot \frac{1}{\pi} \text{ и}$$

тоже, что
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx = \begin{cases} 0, & m \neq 0 \\ 2\pi, & m = 0 \end{cases}$$

(1.6.) Теорема о представимости функции в точке её рядом Фурье

Опр 2π - периодическая функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ кусочно непрерывна, если на $[-\pi, \pi]$ $\exists$ конечное число точек $-\pi = x_0 < x_1 < x_2 < \dots$

$\dots < x_n = \pi$ таких, что:

1) на каждом открытом интервале (x_i, x_{i+1}) функции f непрерывно дифференцируема.

2) $\forall i \exists$ и конечные пределы

$$\lim_{h \rightarrow 0+} f(x_i + h) = f(x_i + 0) \text{ - предел справа}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0+} f(x; -h) \stackrel{\text{обозн}}{=} f(x; -0) - \text{предел слева}$$

при этом $f(x; +0)$ в предельном функцией f в точке x , справа, а $f(x; -0)$ — слева.

3) а существуют и конечные пределы

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x; +h) - f(x; +0)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x; -h) - f(x; -0)}{-h}$$

Замечание: заметим, что для последних предела очень похожи на односторонние производные функции f в точке x , которые задаются формулами:

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x; +h) - f(x;)}{h} \quad \text{— правая}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x; -h) - f(x;)}{-h}$$

Теорема (о представимости функций в точке её разрыва) Фурье

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - 2π -периодич. кусочно-линейная функция, абс. интегр. по промежутку $[-\pi, \pi]$. Тогда ряд Фурье функции f сходится для $\forall x \in \mathbb{R}$ и его сумма равна числу $f(x)$, если x - точка непрерывности функции f и равна $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$, если x - точка разрыва функции f .

Док-во: * на самом деле абс. интегрируемость вытекает из кусочной линейности

П.к. в точке непрерывности

$f(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$, поэтому достаточно проверить, что $S_n(x)$ сходится

к $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] \quad \forall x$.

П.е. нужно доказать, что

$$S_n - \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Преобразуем это выражение:

$$\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) D_n(z) dz}_{S_n} - \underbrace{\left(\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] \right)}_{\substack{\text{rem } D_n(-z) \\ \uparrow}} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} D_n(z) dz$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x+z) - \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] \right) D_n(z) dz =$$

$$= \int_{-\pi}^0 f(x+z) D_n(z) dz + \int_0^{\pi} f(x+z) D_n(z) dz = - \int_{\pi}^0 \left(f(x-z) - \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] \right) D_n(z) dz$$

замена:

$$z \rightarrow -z$$

$$+ \int_0^{\pi} f(x+z) D_n(z) dz = \int_0^{\pi} \left(f(x-z) - \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] \right) D_n(z) dz +$$

$$+ \int_0^{\pi} \left(f(x+z) - \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] \right) D_n(z) dz =$$

$$= \int_0^{\pi} [f(x+z) + f(x-z) - f(x+0) - f(x-0)] D_n(z) dz =$$

$$= \int_0^{\pi} \left[f(x+z) - f(x+0) \right] \cdot \frac{\sin \frac{2n+1}{2} z}{2\pi \sin \frac{z}{2}} dz + \int_0^{\pi} [f(x-z) - f(x-0)]$$

$$\cdot \frac{\sin \frac{2n+1}{2} z}{2\pi \sin \frac{z}{2}} dz$$

абс. унк. на $[0, \pi]$, $p = \frac{2n+1}{2}$

и используем
лемму Римана-Лебега

т.к. f - кусочно марковская, то функция φ может не быть абсолютно интегрируемой только из-за того, что интеграл от $e^{i\varphi}$ модуль расходится в точке 0.

$$\text{Но } \underbrace{\frac{f(x+z) - f(x+0)}{z}} \cdot \underbrace{z \frac{\sin \frac{2n+1}{2}z}{2\pi \sin \frac{z}{2}}}$$

существует и конечен т.к. f - кусочно марковская и (спр. кусочно марковской)

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{2\pi \sin \frac{z}{2}} = \frac{1}{\pi}$$

но f ограничена в окр. точки 0 по предельн. 3) из спр. кусочно марковской функции и поэтому абс. инт.

Значит по Лемме Римана-Лебега каждый из последних интегралов стремится к нулю.

$$\text{т.е. } S_n(x) \rightarrow \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$$

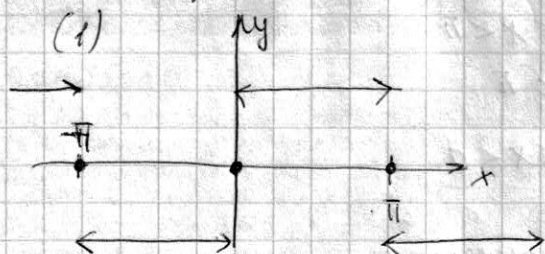
Читр.

Замечание: известные и другие условия, гарантирующие

возможность представить функцию
ее" рядом Фурье.

Но только непрерывности функции
 f для этого не достаточно

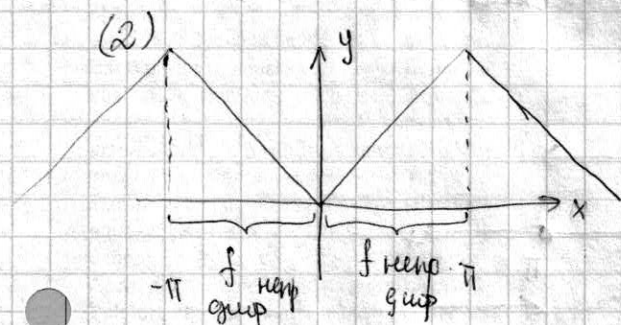
Примеры кусочно гладких функций:



$$X_0 = -\pi$$

$$X_1 = 0$$

$$X_2 = \pi$$



$$X_0 = -\pi$$

$$X_1 = 0$$

$$X_2 = \pi$$

$\ln|x|$ - не является кусочно-гладкой!
т.к. $\lim_{h \rightarrow 0+} f(0+h) = \lim_{h \rightarrow 0+} f(0-h) = -\infty$

$f = \frac{1}{x}$ - не интегрируема на $[-\pi, \pi]$

$\left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{x} \right)$ - расходится

интеграл?
в смысле
главного значения

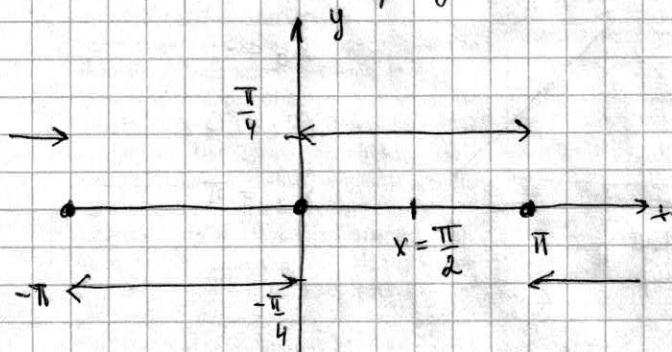
21.09.20 Лекция 3

17) Пример разложения функции в ряд Фурье и вычисление коэффициентов ряда

Пусть

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & 0 < x < \pi \\ 0, & x = 0, \pi \\ -\frac{\pi}{4}, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

f - 2 π -периодическая



f - нечетная $\Rightarrow a_n = 0$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^n - 1}{n} = \begin{cases} 0, & n - \text{чет.} \\ \frac{1}{n}, & n - \text{нечет.} \\ & n = 2k+1 \end{cases} \end{aligned}$$

значит $f(x) \sim \sum_{\substack{n=1 \\ n-\text{нечёт}}}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$

с.п.к. $f(x)$ - кусочно гладкая и абсолютно непрерыв.

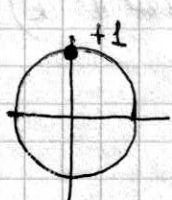
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$$

* далее в точках разрыва, т.к.

$$\frac{1}{2}(f(0+0) + f(0-0)) = 0 = f(0)$$

Подставим $x = \frac{\pi}{2}$, тогда

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left[\frac{(2k+1)\pi}{2}\right]}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$



$$\begin{aligned} k=0 \quad \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) &= 1 \\ k=1 \quad \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) &= -1 \\ &\dots \end{aligned}$$

↑ ряд Лейбница

1.8 Ряд Фурье в комплексной форме

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - 2π -периодическая гл.

① Всегда ли гладкая функция гл. или не гл. на конечном промежутке? Гладкая ($\equiv$ непрерывно дифференцируемая)

Тогда по теор. о представимости функции в точке $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$$

$$\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \cdot i = \frac{-ie^{inx} + ie^{-inx}}{2}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}, \text{ где}$$

$$c_k = \begin{cases} \frac{a_0}{2}, & \text{если } k=0 \\ \frac{a_k - ib_k}{2}, & \text{если } k>0 \text{ (при этом } n=k) \\ \frac{a_{-k} + ib_k}{2}, & \text{если } k<0 \text{ (при этом } n=-k) \end{cases}$$

Но считаем их сразу комплексно

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \text{ при } k=0$$

$$\begin{aligned} \frac{a_k - ib_k}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) [\cos kx - i \sin kx] dx = \left(\begin{array}{l} \text{по формуле} \\ \text{Эйлера} \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k>0 \end{aligned}$$

$$\frac{a_{-k} + i b_{-k}}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) [\cos(-kx) + i \sin(-kx)] dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) [\cos kx - i \sin kx] dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx,$$

если $k < 0$

Разложение

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$$

разложения

в ряд

Фурье

в комплексной

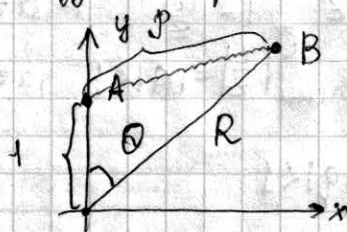
форме, а коэффициенты c_k даются формулой

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

1.9. Разложение в комплексной и вещественный ряд Фурье без вычисления интегралов.

Пусть $f(x) = \frac{1-a^2}{1-2a \cos x + a^2}$, где $|a| < 1$

Откуда берётся такой знаменатель?



по теореме косинусов

$$p^2 = 1 - 2R \cos \theta + R^2$$

$$R > 1; a = \frac{1}{R}$$

$$p^2 = R^2 (a^2 - 2a \cos \theta + 1)$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

$$\begin{aligned} z &= e^{ix} \\ |z| &= 1 \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{1-a^2}{1-a(z+\frac{1}{z})+a^2} = \frac{(1-a^2)z}{-az^2+(1+a^2)z-a} \quad r=\frac{1}{a}$$

$$= \frac{(a-\frac{1}{a})z}{z^2 - (a+\frac{1}{a})z + 1} = \frac{(a-\frac{1}{a})z}{(z-a)(z-\frac{1}{a})} \quad \ominus$$

по теореме Безу

$$\ominus \quad \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-\frac{1}{a}} = \frac{A(z-\frac{1}{a}) + B(z-a)}{(z-a)(z-\frac{1}{a})} \quad \Leftrightarrow$$

коэф. при z

$$\begin{cases} A+B = a - \frac{1}{a} \\ 1 - \frac{A}{a} - Ba = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = a \\ B = -\frac{1}{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{z-a} - \frac{1/a}{z-\frac{1}{a}} = \frac{a}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{a}{z}} + \frac{1}{1-az} =$$

сумма геом. прогрессии $|\frac{a}{z}| = |a| < 1 \quad |az| = |a| < 1$

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n, \quad |q| < 1$$

$$= \frac{a}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n \quad \ominus$$

$z = e^{ix}$
 $z^n = e^{inx}$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1} e^{-i(n+1)x} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{inx} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{ikx}, \text{ где}$$

$$C_k = \begin{cases} a^k, & \text{если } k \geq 0 \text{ (при этом } n=k) \\ a^{-k}, & \text{если } k \leq -1 \text{ (при этом } n+1=-k) \end{cases}$$

$$\text{или } C_k = a^{|k|}, \forall k \in (-\infty, +\infty). \text{ Значит}$$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^{|k|} e^{ikx} \quad \text{— ряд Фурье в комплексной форме}$$

$$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a^k (e^{ikx} + e^{-ikx}) \quad \text{— по ф-ле Эйлера}$$

$$= 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a^k \cos kx \quad \text{— ряд Фурье в веществ. форме}$$

1.10 Теоремы о дифференцировании и интегрировании рядов Фурье.

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — 2π -периодическая непрерывная функция. Теорема о представимости в точке x_0 рядом Фурье выполняется

тогда $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

и $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — $\leftarrow$ упр. $\frac{1}{2\pi}$ -периодич. непрерывная функция

$$f'(x) \sim \frac{a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n' \cos nx + b_n' \sin nx)$$

Теорема (о почленном дифференцировании ряда Фурье)

С учетом стандартных обозначений имеем

$$a_0' = 0; \quad a_n' = nb_n; \quad b_n' = -na_n \quad \forall n.$$

Док-во:

где a_n'

$$a_n' = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx \, dx \stackrel{\text{по частям}}{=} \frac{1}{\pi} \left(\underbrace{f(x) \cos nx}_{=0, \text{ т.к. } \frac{1}{2\pi}\text{-периодич.}} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \right)$$

$$n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx =$$

$$= n \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = n \cdot b_n$$

где остальные — упр.

Замечание: Чем объясняется название этой теоремы?

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right) \stackrel{?}{=}$$

↑ можно ли его продифференцировать почленно?

$$\stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} -a_n n \sin nx + \boxed{n b_n} \cos nx$$

$$\rightarrow f'(x) \sim \frac{a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\boxed{a_n'} \cos nx + b_n' \sin nx)$$

А.е. после формального диф. (?)

получится правдивое кэф. (из теоремы)

Вывод: настоящий ряд Фурье можно дифференцировать почленно, но при этом получится формальный ряд Фурье.

Пусть $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - 2π -периодическая и непрерывная и $\int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = 0$. Тогда

$g(x)$ можно сопоставить формальный

пер Фурье

$$g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Построим новую функцию

$$G(x) = \int_0^x g(t) dt \quad \left(\begin{array}{l} \text{первообразная} \\ g(y) \end{array} \right)$$

Тогда $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - 2 π -периодич. и
* если бы $\int g(x) dx \neq 0$
то не 2 π период.

$$G(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

Лемма (о почленном интегрировании)
пер Фурье

При определенных допущениях и
означениях справедливо равенство

$$\frac{A_0}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}, \quad \left(A_n = -\frac{b_n}{n} \right), \quad \left(B_n = \frac{a_n}{n} \right)$$

Док-во:

т.к. $G'(x) = g(x)$, то для $\circ$ и $\square$
следует из предыдущей теоремы.

$$G(0) = 0 \quad (\text{т.к. } \int_0^0 g(t) dt = 0)$$

$$G(0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{A_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{A_0}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \quad \text{Читая.}$$

Замечание: Почему у этой теоремы такое название?

$$g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Можно ли проинтегрировать ряд почленно?

$$G(x) = \int_0^x g(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_0^x \cos nt dt + b_n \int_0^x \sin nt dt \right) =$$

$$\underbrace{\sin \frac{nt}{n} \Big|_{t=0}^{t=x}}_{\frac{\sin nx}{n}} - \underbrace{\frac{\cos nt}{n} \Big|_{t=0}^{t=x}}_{-\frac{\cos nx}{n} + \frac{1}{n}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \frac{\sin nx}{n} - b_n \left(\frac{\cos nx}{n} - \frac{1}{n} \right) \right]$$

* Домашние вопросы и рассуждение:

① Если $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -периодич. шаркал функции, то почему $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - 2π -периодич. непрерывная функция?

По определению производной

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \text{ тогда } f'(x_0 + 2\pi) =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2\pi + \Delta x) - f(x_0 + 2\pi)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

↗ $\Delta x \rightarrow 0$ Δx

и f - 2π период.

① Приведите пример кусочно-гладкой функции не интегрируемой абсолютно на отрезке $[-\pi, \pi]$.

② Покажите если $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - 2π -периодическая, непрерывная и $\int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = 0$, то

$G(x) = \int_0^x g(t) dt$ - 2π -периодическая и гладкая?

$G'(x) = g(x)$, а g непрерывная $\rightarrow G(x)$ - гладкая (непр. диф)

$$G(x+2\pi) = \int_0^{x+2\pi} g(t) dt = \langle y = t - 2\pi \rangle \int_{-2\pi}^x g(t) dt$$

сделаем замену

аргумента интеграла

$$= \int_{-2\pi}^x g(y+2\pi) dy = \int_{-2\pi}^x g(y) dy = \int_{-2\pi}^0 g(y) dy +$$

g - 2π -периодическая

замена $s = y + 2\pi$

$$+ \int_0^x g(y) dy = G(x) + \int_0^{2\pi} g(s-2\pi) ds = G(x)$$

28.09. Лекция 4

Проявление замечание: (?-необоснованные) ^{восхищение} _{исполн.}

$$\begin{aligned}
 G(x) &= \int_0^x g(t) dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) dt = ? \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_0^x \cos nt dt}_{\frac{\sin nx}{n}} + b_n \underbrace{\int_0^x \sin nt dt}_{-\frac{\cos nx + 1}{n}} = \\
 &= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}}_{\frac{A_0}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{-\frac{b_n}{n}}_{A_n} \cos nx + \underbrace{\frac{a_n}{n}}_{B_n} \sin nx \right)
 \end{aligned}$$

Вывод: Формальный ряд Фурье всякой непрерывной 2π -периодич. функции можно интегрировать почленно и при этом получить ряд Фурье (знак равенства!)

1.11' Задача о наилучшем приближении тригонометрическими многочленами.

Опр. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Возвращение $T_n(x) =$

$$= \frac{L_0}{2} + \sum_{m=1}^n (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx) \quad \neq$$

тригонометрия многочлена степени n .

Числа a_m и b_m произвольные и

каждого многочлена $T_n(x)$.

Задача (о наилучш. прил. тригонометрич. полином)

Пусть дана 2π -периодич.

функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$.

Требуется найти тригонометрич. многочлен $T_n(x)$ степени n , наилучшим образом приближающий функцию f .

Точнейший вопрос: Что значит "наилучшим образом"?

Возможные ответы:

1) $\sup_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x) - T_n(x)| \rightarrow \min$

минимизация в супремум-норме или в равномерной норме или в Чебышевской норме.

2) $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_n(x)| dx \rightarrow \min$

минимизация в среднем

3) $\sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_n(x)|^2 dx} \rightarrow \min$

* модуль
здесь
используется

минимизация в среднем квадратичном.

(идея: монотонная функция, поэтому можно отбросить π , 2π и найти $\min \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_n(x))^2 dx$)

Уточнённая задача:

Пусть дано $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - 2π -периодич. и

$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < +\infty$ (сходится) и число $n \in \mathbb{N}$.

Требуется найти тригонометр. многочлен степени n $T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$

такой, чтобы $\forall$ тригонометр. многочлена $R_n(x)$ степени n выполнялось неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - R_n(x)|^2 dx \geq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_n(x)|^2 dx.$$

Такой многочлен $T_n(x)$ и будет называться многочленом наилучшего приближ.

Решение этой задачи даётся след. теоремой:

Теорема (о наилучш. приближ. триг. многочленами)

При следующих предположениях, т.е.
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - 2π -периодическая функция:
 $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < +\infty$ и $n \in \mathbb{N}$.

Следующие два условия эквивалентны:

1) T_n - многочлен наименьшего приближения

2) $T_n(x) = S_n(x)$, где $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m \cos mx +$

$+ b_m \sin mx)$ - частичный отрезок ряда

Фурье функции $f(x)$, т.е. π

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx, \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx$$

Замечание

$$A = \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < +\infty \right\} \leftarrow \text{раньше}$$

$$B = \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < +\infty \right\} \leftarrow \text{сейчас}$$

Как эти классы связаны?

$$A \not\supseteq B$$

(Есть функции лежащие

в A , но не лежащие в B , но если функция лежит в B , то она точно лежит в A)

Док-во замечания:

$$\forall u, v \in \mathbb{R} \text{ имеем } 2|uv| \leq u^2 + v^2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2uv \leq u^2 + v^2 \\ -2uv \leq u^2 + v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u-v)^2 \geq 0 \\ (u+v)^2 \geq 0 \end{cases}$$

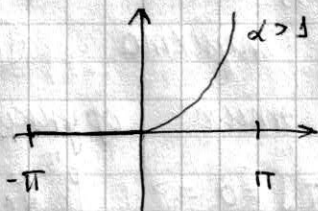
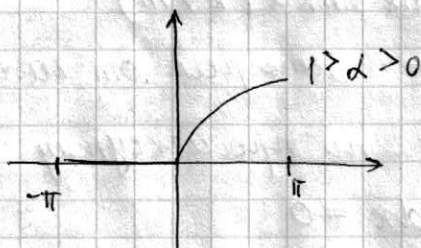
Положим $u = f(x)$ $v = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2|f(x)| \leq |f(x)|^2 + 1 \Rightarrow$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx \leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 + \frac{1}{2} \cdot 2\pi < +\infty$$

Почему эти классы не совпадают?

Рассмотрим $f(x) = \begin{cases} x^\alpha, & \text{если } 0 < x < \pi \\ 0, & \text{если } -\pi < x < 0 \end{cases}$



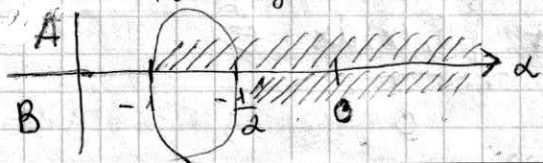
Для такой функции $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx = \int_0^{\pi} x^\alpha dx =$

$$= \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_0^{\pi}, & \text{если } \alpha+1 \neq 0, \text{ эквивалентно } \Leftrightarrow \alpha+1 > 0 \\ \ln x \Big|_0^{\pi}, & \text{если } \alpha+1 = 0 - \text{расходимся} \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \int_0^{\pi} x^{2\alpha} dx = \begin{cases} \frac{x^{2\alpha+1}}{2\alpha+1} \Big|_0^{\pi}, & \text{если } 2\alpha+1 \neq 0, \text{ эквивалентно } \Leftrightarrow 2\alpha+1 > 0 \\ \ln x \Big|_0^{\pi}, & \text{если } 2\alpha+1 = 0 \end{cases}$$

↑ расходятся

несовпадение!



Док-во теоремы:

$$\begin{aligned} |f(x) - T_n(x)|^2 &= \left| f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{m=1}^n (\alpha_m^2 \cos mx + \beta_m^2 \sin mx) \right|^2 \\ &= |f(x)|^2 + \frac{a_0^2}{4} + \sum_{m=1}^n (\alpha_m^2 \cos^2 mx + \beta_m^2 \sin^2 mx) - a_0 f(x) - 2 \sum_{m=1}^n [\alpha_m f(x) \cos mx + \beta_m f(x) \sin mx] + \sigma_n^2(x), \text{ где } \sigma_n^2(x) \end{aligned}$$

является линейной комбинацией функций вида $\cos mx$ ($m \geq 1$), $\sin mx$ ($m \geq 1$), $\cos kx \cdot \cos mt$ ($m \neq k$), $\cos mx \cdot \sin kx$, $\sin mx \cdot \sin kx$ ($k \neq m$)

из пункта (1.1) $\Rightarrow$ интеграл от каждого из этих функций по промежутку $[-\pi, \pi] = 0 \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n^2(x) dx = 0$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_n(x)|^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx + \frac{a_0^2}{4} \cdot 2\pi + \\ &+ \sum_{m=1}^n \alpha_m^2 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx}_{\pi} + \beta_m^2 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx}_{\pi} - \\ &- a_0 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx}_{2 \cdot a_0} - 2 \sum_{m=1}^n \left[\underbrace{\alpha_m \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx}_{\pi \cdot \alpha_m} + \right. \\ &\left. + \underbrace{\beta_m \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx}_{\pi \cdot \beta_m} \right] + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n^2(x) dx}_0 \quad \textcircled{E} \end{aligned}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx + \frac{\pi d_0^2}{2} + \pi \sum_{m=1}^n (d_m^2 + \beta_m^2) - \pi d_0 a_0 -$$

$$- 2\pi \sum_{m=1}^n (d_m \cdot a_m + \beta_m \cdot b_m) =$$

↑ выделим полный квадрат

$$= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx + \frac{\pi}{2} (d_0^2 - 2d_0 a_0 + a_0^2) - \frac{\pi a_0^2}{2} +$$

$$+ \pi \sum_{m=1}^n [(d_m^2 - 2d_m a_m + a_m^2) - a_m^2 +$$

$$+ (\beta_m^2 - 2\beta_m b_m + b_m^2) - b_m^2] = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

$$+ \frac{\pi}{2} (d_0 - a_0)^2 - \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi \sum_{m=1}^n [(d_m - a_m)^2 +$$

$$+ (\beta_m - b_m)^2] - \pi \sum_{m=1}^n (a_m^2 + b_m^2) \quad (*)$$

Слагаемое $\square$ не зависит от $T_n(x)$.

Слагаемые $\sim$ надо минимизировать, они неотриц. и они за нульются $\Leftrightarrow$

$$T_n(x) = S_n(x)$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_n(x)|^2 dx \text{ достигает миним.}$$

$$\text{значения} \Leftrightarrow T_n(x) = S_n(x)$$

Читая

Теорема (неравенство Бесселя)

Если $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx < +\infty$, то

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

* Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ сходится и имеет место неравенство.

Док-во: Подставим в (*) $S_n(x)$

вместо $T_n(x)$:

т.к. интегр. непрерыв. функцию

$$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - \frac{\pi}{2} a_0^2 -$$

$$- \pi \sum_{m=1}^n (a_m^2 + b_m^2)$$

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m^2 + b_m^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \quad \forall n$$

Перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^2 + b_m^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

Урамотно:

Число

послед. слагаемых суммы -

монотонно возрастает $\Rightarrow$ она имеет предел конечный или ∞ , но т.к. нер-во

выполнено для всех n , то она конечна

1.12.

Равномерная сходимость ряда ФурьеНапоминание:

Опр Говорят, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$ к функции $u(x)$, если $\sup_{x \in [a, b]} |u(x) - \sum_{m=1}^n u_m(x)| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$

Теорема (Вейерштрасса о равномерной сходимости функц. ряда).

Пусть дан $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ при $x \in [a, b]$ и $\forall x \in [a, b]$ выполняется неравенство $|u_n(x)| \leq c_n$, при этом $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ (числ. ряд с неотр. членами) сходится, тогда функция $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$.

Теорема (о равномерной сходимости ряда Фурье)

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -периодическая непрерывная функция, тогда ее ряд Фурье $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx}$ сходится к f на всей числовой прямой равномерно!

Док-во: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

Пусть $u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$.

Тогда $|u_n(x)| \leq |a_n \cos nx| + |b_n \sin nx| \leq$
 $\leq |a_n| + |b_n| = \frac{|a_n'|}{n} + \frac{|b_n'|}{n} \leq$

мед о диффер. ряда Фурье $u_n \leq \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$

$a_n' = n \cdot b_n$ — коэф-ты Фурье
 $b_n' = -n a_n$ функции f'

$\leq \frac{1}{2} \left(|b_n'|^2 + \frac{1}{n^2} \right) + \frac{1}{2} \left(|a_n'|^2 + \frac{1}{n^2} \right) =$

$= \frac{1}{2} \left(|b_n'|^2 + |a_n'|^2 \right) + \frac{1}{n^2} \stackrel{\text{обозначим}}{=} c_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n'|^2 + |b_n'|^2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq$
 $\frac{\pi^2}{6}$

$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx + \frac{\pi^2}{6} < \infty$

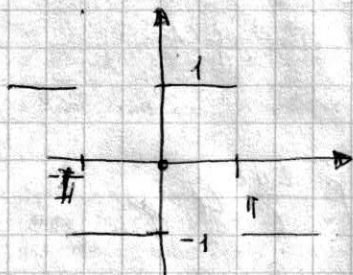
нер-во
Бесселя
для f'

т.к. $f'(x)$ непрерывна $\int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2 dx < \infty$

1.13. В явлении Гиббса

Каковы особенности сходимости ряда Фурье в окрестности точки разрыва?

Пусть



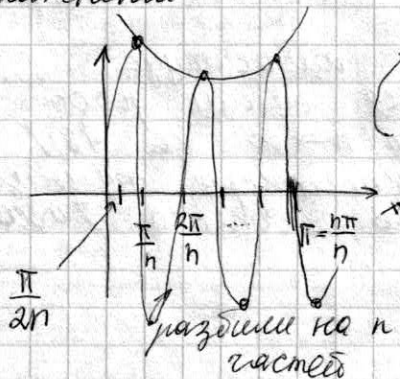
$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi \\ 0, & x = 0 \\ -1, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

Из пункта пример разложения $f(x)$ в ряд Фурье $\Rightarrow f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$

Обозначим частичную сумму $S_n(x)$:

$$S_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^n \frac{\sin(2m+1)x}{2m+1}$$

Упражнение:



$$\max_{x \in [0, \pi]} S_n(x) = S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

глобальный максимум функции $S_n(x)$ достигается в

$$\frac{\pi}{2n} \quad * \text{ остается в предельном}$$

$$S_n \left(\frac{\pi}{2n} \right) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\sin[(2m+1)\frac{\pi}{2n}] \cdot \frac{\pi}{2n}}{(2m+1)\frac{\pi}{2n}}$$

длина
одного
интервала

сумма Рундана где
сумма Рундана где
одного
интервала

интеграла $\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt$



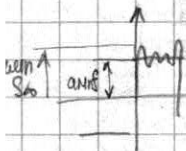
Предел сумм Рундана будет
равен $\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt$

* Из математизма: $S_i(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$
интегральным синусом. $S_i(x)$ но

выражается в элементарных функциях
(есть такая теорема). Но её численное
значение хорошо известно. Из наших
мы знаем, что

$$\max_{x \in [0, \pi]} S_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{2}{\pi} S_i(\pi) \approx 1,1789$$

наша
фракционная
революция!



Значит амплитуда
частичных сумм ряда
Фурье при $n \rightarrow \infty$ на 18%
превысит амплитуду функции
 $f(x)$. Это и есть явление Гиббса

[оп] Говорят, что у функции f в точке x_0 наблюдается явление Гиббса, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) > \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) > \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$$

Замечание (1) У непрерывной кусочно-линейной функции явления Гиббса нет

(2) В любой точке разрыва кусочно-линейной функции явление Гиббса есть, причем с тем же 18% прибавлением кусочно-постоянной $\Rightarrow$ полукосинус

(3) Подобного рода явление, когда возникает систематическая ошибка при попытках судить о максимальной функции по максимуму приближающих ее частичных сумм, имеют место не только в рядах Фурье но и в других рядах

(1.14) Равенство Мелюнова

Теорема (Равенство Мелюнова)

Пусть $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ и $\int (f(x))^2 dx < +\infty$.

Тогда ряд $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ сходится

и имеет место равенство $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) =$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

Док-во.

Шаг 1. Пусть f - непрерывная функция.

Из пункта, заданного в предыдущем $\Rightarrow$
* "приближении"

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \frac{a_0^2}{2} -$$

$$- \pi \sum_{m=1}^n (a_m^2 + b_m^2), \text{ где } S_n(x) - \text{частичная сумма р.ф. } f(x)$$

Перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$. П.к.

$S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ для непрерывных функций, т.е.

$$|S_n(x) - f(x)|^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ можем переходить к пределу под знаком интеграла:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} * = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \frac{a_0^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Шаг 2. Обратная сторона

Общая идея: нужно приблизить произвольную функцию $f(x)$ непрерывными функциями

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_{\varepsilon}(x)|^2 dx < \varepsilon$$

$\leftarrow$ непрерывная функция

Теорема (обобщенное равенство Лежандра)

Пусть $f, g: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ и $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx < +\infty$,
 $\int_{-\pi}^{\pi} g^2(x) dx < +\infty$. И пусть a_n, b_n - коэф. Фурье
функции f , α_n, β_n - коэф. Фурье g .

Тогда:
$$\frac{a_0 \alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n a_n + \beta_n b_n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$$

Док-во

Коэф-ты Фурье g и $f+g$ равны
 $a_n + \alpha_n, \beta_n + b_n$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) + g(x)) \cos nx dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos nx dx \\ &= a_n + \alpha_n \end{aligned}$$

Напишем равенство Лежандра для
функций $f+g$ и $f-g$

$$\frac{(a_0 + \alpha_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n + \alpha_n)^2 + (b_n + \beta_n)^2] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f+g)^2 dx$$

$$\frac{(a_0 - \alpha_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n - \alpha_n)^2 + (b_n - \beta_n)^2] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f-g)^2 dx$$

Воспользуемся тождеством:

$$(u+v)^2 - (u-v)^2 = 4uv$$

$$4. \frac{a_0 d_0}{2} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} (a_n d_n + b_n \beta_n) = 4 \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$$

Теорема (равенство Парсеваля в комплексной форме)

Пусть $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ и $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$

и c_n — коэф-ты в комплексной форме ф-ции f , т.е. $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$.

Тогда
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

Док-во:

$$c_n = \begin{cases} \frac{a_n - ib_n}{2}, & n > 0 \\ \frac{a_0}{2}, & n = 0 \\ \frac{a_{-n} + ib_n}{2}, & n < 0 \end{cases}$$

I шаг Пусть $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$|c_n|^2 = c_n \cdot \overline{c_n} = \begin{cases} \frac{a_n - ib_n}{2} \cdot \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{a_n^2 + b_n^2}{4}, & n > 0 \\ \frac{a_0}{2} \cdot \frac{a_0}{2} = \frac{a_0^2}{4}, & n = 0 \\ \frac{a_{-n} + ib_n}{2} \cdot \frac{a_{-n} - ib_n}{2} = \frac{a_{-n}^2 + b_{-n}^2}{4}, & n < 0 \end{cases}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{-1} |c_n|^2 + |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2 =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{a_{-n}^2 + b_{-n}^2}{4} + \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{4} =$$

↑ сдвигаем замену $n = -n$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \right) \underset{\substack{\text{теор.} \\ \text{Парсеваля}}}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

II шаг Пусть $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$. Представим

$$f(x) = f'(x) + i f''(x), \text{ где } f'(x) = \operatorname{Re} f(x), f''(x) = \operatorname{Im} f(x)$$

Пусть c_n' и c_n'' - коэф. Фурье в комплексной форме f' и f''

Тогда $c_n = c_n' + i c_n''$ из-за линейности интеграла

$$|c_n|^2 = c_n \bar{c}_n = (c_n' + i c_n'')(c_n' - i c_n'') = c_n'^2 + c_n''^2$$

$$|f(x)|^2 = f(x) \cdot \bar{f}(x) = (f' + i f'')(f' - i f'') = |f'|^2 + |f''|^2$$

Знаем

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n'|^2 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n''|^2 \stackrel{\text{по Лемме}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)|^2 dx$$

⊖

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

↑
*

(1.15) Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении тригонометр. и алгебр. многочленами

Теорема (Вейерштрасса о равномерном приближении непр. функций триг. мн.)

Пусть $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, непрерывна и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists$ тригонометр. многочлен $T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$

такой, что $\forall x \in [-\pi, \pi]$ справедливо

неравенство

$$|f(x) - T_n(x)| < \varepsilon$$

послед. T_n
равномерно
сходящаяся
к f

* приближим сразу во всех точках x , т.е. равномерно

Мерили кривую, а она тригоном. многочлен :)

Док-во

(I) Пусть $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - 2π -периодическая

и $\forall x \in [-\pi, \pi] f(x) = F(x)$, т.е.

$F(x)$ - 2π -периодич. продолжение $f(x)$

Л.к. $f(x)$ - непрерывна и $f(-\pi) = f(\pi)$, то

f - непрерывная функция.

II) Вспомогательная $h > 0$ и построим функцию

$$F_h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt$$

т.е. заменим значение
в точке x
средним значением
на промежутке $[x-h, x+h]$

↑ усреднение по Стильксу

— 12.10 Лекция 6 —

Свойства функции $F_h(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

1) F_h - 2π -периодическая

Док-во

$$F_h(x+2\pi) = \frac{1}{2h} \int_{x+2\pi-h}^{x+2\pi+h} f(t) dt = \left\langle \begin{matrix} \text{замена} & \text{при } t \rightarrow x+2\pi \\ s = t - 2\pi & s \rightarrow x \end{matrix} \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(s+2\pi) ds = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(s) ds = F_h(x)$$

↑
 $m, k \cdot \pi$ - 2π -периоды.

2) F_h непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$:

из математиза:

$$\frac{d}{dy} \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} g(x, y) dx = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial}{\partial y} (g(x, y)) dx + \frac{d\beta}{dy} \cdot g(\beta(y), y) - \frac{d\alpha}{dy} \cdot g(\alpha(y), y)$$

Значит,

$$\frac{dF_h(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt = \frac{1 \cdot f'(x+h) - 1 \cdot f'(x-h)}{2h}$$

производная верх. и ниж. предел

↑
непрерывная функция
F_h - непр. дифференц.

3) Из леммы:

теорема Кантора: всякая непрерывная на конечном замкнутом промежутке [a, b] функция G равномерно непрерывна на нем, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: если $|x - y| < \delta$

и $x, y \in [a, b]$, то $|G(x) - G(y)| < \varepsilon$
в отличие от непрерывности δ зависит сразу от x , а в равномерности сначала фиксируют x , а потом ищут δ

4) $F'_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'$ на всей числовой прямой
равномерно сходится

$\Leftrightarrow$ на $[-\pi, \pi]$ (т.к. они 2π -периодич.)

Док-во

$$\begin{aligned} |F'_h(x) - f'(x)| &= \left| \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f'(t) dt - \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f'(x) dt \right| = \\ &= \frac{1}{2h} \cdot \left| \int_{x-h}^{x+h} (f'(t) - f'(x)) dt \right| \leq \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f'(t) - f'(x)| dt \leq \end{aligned}$$

$$\leq \varepsilon \frac{1}{2h} \cdot 2h = \varepsilon$$

↑
по

, т.е. последоват. f_n сходится равномерно

свойству 3

т.к. f - непрерывна

и даже равномерно

непрерывна

и $|t-x| \leq h < \delta$ выбрали h , чтобы оно было $< \delta$

Окончательно:

f_n - 2π -периодические, непрерывно-диф. ф-ции, значит её ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^k \cos nx + b_n^k \sin nx \quad \text{сходится к}$$

функции f_n равномерно, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$:

$$\forall 0 < h < \delta : |f_n(x) - S_n^h(x)| < \varepsilon \quad \text{выполняется}$$

чрез $\forall x \in [-\pi, \pi]$, где $S_n^h(x) = \frac{a_0^k}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m^k \cos mx + b_m^k \sin mx)$ - частичная сумма.

Значит, положив $T_n(x) = S_n^h(x)$ будем иметь $|f(x) - T_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$

$$|f(x) - T_n(x)| = |f(x) - S_n^h(x)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\text{нр. в. трезу}} + \underbrace{|f_n(x) - S_n^h(x)|}_{\leq \varepsilon \quad \forall h < \delta \text{ (из св. 3)}} \leq 2\varepsilon$$

Читая

$\xrightarrow{\text{нр. в. трезу}} \varepsilon^*$
($\forall h < \delta$)

Теорема Вейерштрасса о
равномерном приближении алгебраическими
многочл.)

Если $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерывная
функция, то $\forall \varepsilon > 0 \exists$ алгебр. многочл. P_n

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^n c_m x^m, \text{ такой что}$$

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]$$

Док-во

Шаг 1 Достаточно доказать эту
теорему в случае $[a, b] = [0, \pi]$

Допустим $\forall g: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R} \exists P_n$ -
алгебраич. многочл.: $|g(y) - P_n(y)| < \varepsilon \quad \forall y \in [0, \pi]$

Для данной ф-ции $f(x)$ сделаем
замену переменной: $x = \alpha y + \beta$, при

таким $x \in [a, b]$, когда $y \in [0, \pi]$

$$\begin{cases} \alpha \cdot 0 + \beta = a \\ \alpha \cdot \pi + \beta = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = a \\ \alpha = \frac{b-a}{\pi} \end{cases}$$

Положим по определению $g(y) = f(\alpha y + \beta) = f(x)$

она непрерывна и определена $[0, \pi] \Rightarrow$

по предположению $\forall \varepsilon > 0 \exists P_n$ - ал. многочл.

такой, что $|g(y) - P_n(y)| < \varepsilon \quad \forall y \in [0, \pi]$

В этом неравенстве перейдем от y к x :

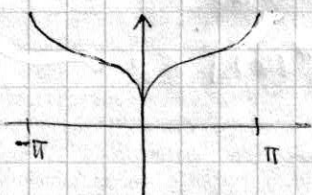
$$\left| f(x) - \underbrace{P_n\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)}_{\substack{\text{аттраши} \\ \text{многочлен от} \\ x}} \right| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]$$

II шаг Пусть $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ и непрерывно.

Представим её четным образом на промежутке $[-\pi, \pi]$. с.т. е. $F(x) = f(|x|)$

$$\forall x \in [-\pi, \pi]$$

Тогда F - непрерывна и $F(-\pi) = F(\pi)$



по предыдущей теореме $\forall \varepsilon > 0$

$\exists$ тригонометрич. многочлен

$$\left| F(x) - T_n(x) \right| < \varepsilon$$
$$\forall x \in [-\pi, \pi]$$

Из анализа:

Ряд Фурье для $\begin{Bmatrix} \cos x \\ \sin x \end{Bmatrix}$ сходится к

этой функции равномерно на любом конечном интервале $[-R, R]$ (нам нужен интервал $[-\pi, \pi]$)

Будем заменять в тригонометр. многочлене $T_n(x)$ все синусы и косинусы начальными отрезками их ряда Фурье до степени N .

Результат обозначим $T_n^N(x)$

Из математического анализа знаем, что
последовательность $T_n^N(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} T_n(x)$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 : \forall N \geq N_0 |T_n(x) - T_n^N(x)| < \varepsilon$$

$$\forall x \in [-\pi, \pi]$$

(Конечная бесконечная подпоследовательность равномерно сходящихся рядов является равномерно сходящимся рядом)

Значит: $\forall x \in [0, \pi]$ $|f(x) - T_n^N(x)| \leq \underbrace{\text{пер-во } \Delta}_{\text{а метр. ин-т } = P_n(x)} \leq \varepsilon$

$$\leq \underbrace{|f(x) - T_n(x)|}_{\leq \varepsilon \text{ (прерыв. метр)}} + \underbrace{|T_n(x) - T_n^N(x)|}_{\leq \varepsilon \text{ (равн. сх)}} \leq 2\varepsilon$$

§2 Преобразование Фурье

(2.1) Интеграл Фурье как предельная форма ряда Фурье

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - абсолютно интегрируема
и непрерывно дифференцируема
и пусть $\ell > 0$. Тогда $\forall x \in [-\ell, \ell]$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{\ell} + b_n \sin \frac{\pi n x}{\ell}$$