

Из математического анализа знаем, что
последовательность $T_n^N(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} T_n(x)$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 : \forall N \geq N_0 \quad |T_n(x) - T_n^N(x)| < \varepsilon$$

$$\forall x \in [-\pi, \pi]$$

(Конечная последовательность полиномов, равномерно сходящаяся к пределу, является равномерной сходящейся рядом)

Значит: $\forall x \in [0, \pi]$ $|f(x) - T_n^N(x)| \leq \underbrace{\text{норм. откл.} = P_n(x)}_{\text{норм. откл.} = P_n(x)} \leq \text{норм. откл.} = P_n(x)$

$$\leq \underbrace{|f(x) - T_n(x)|}_{\leq \varepsilon \text{ (продолж. погр.)}} + \underbrace{|T_n(x) - T_n^N(x)|}_{\leq \varepsilon \text{ (равн. сходим.)}} \leq 2\varepsilon$$

§2 Преобразование Фурье

(2.1) Интеграл Фурье как предельная форма ряда Фурье

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — абсолютно интегрируема
и непрерывно дифференцируема
и пусть $l > 0$. Тогда $\forall x \in [-l, l]$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l}$$

$$\text{где } a_n = \frac{1}{e} \int_{-e}^e f(t) \cos \frac{\pi n t}{e} dt$$

$$b_n = \frac{1}{e} \int_{-e}^e f(t) \sin \frac{\pi n t}{e} dt$$

* Проверяем в том, что левая и правая часть равенства определены на $\mathbb{R}$ а равенство справедливо только на $[-e, e]$.

Наводящие соображения:

Перейдем к пределу при $e \rightarrow \infty$, при этом не будем строго обосновывать законность действия:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2e} \int_{-e}^e f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e} \int_{-e}^e f(t) \cos \frac{\pi n t}{e} dt \cdot \cos \frac{\pi n x}{e} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{e} \int_{-e}^e f(t) \sin \frac{\pi n t}{e} dt \cdot \sin \frac{\pi n x}{e} \right) = \frac{1}{2e} \int_{-e}^e f(t) dt + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e} \int_{-e}^e f(t) \left[\underbrace{\cos \frac{\pi n t}{e} \cdot \cos \frac{\pi n x}{e} + \sin \frac{\pi n t}{e} \cdot \sin \frac{\pi n x}{e}}_{\text{косинус разности}} \right] dt = \\ &\quad \cos \frac{\pi n}{e} (t-x) \end{aligned}$$

$$= \left\langle \begin{array}{l} \text{вынесем} \\ \text{интеграл} \\ \text{за знак суммы} \end{array} \right\rangle = (*)$$

Под знаком интеграла получим:

$$\frac{1}{e} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n}{e} (t-x). \text{ Обозначим } y_n = \frac{\pi n}{e},$$

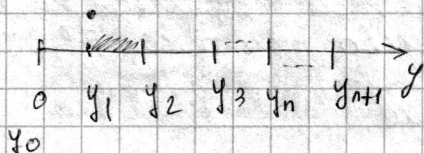
$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = \frac{\pi(n+1)}{e} - \frac{\pi n}{e} = \frac{\pi}{e}$$

$$\frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n(t-x)}{l} = \frac{1}{l} \cdot \frac{l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} [\cos y_n(t-x)] \cdot \overbrace{\Delta y_n}^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{n}{l}$$

↑
сумма ряда
нормальная

↓
суммируем
нормально

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos[y \cdot (t-x)] dy$$



степеней в φ -ле (*) при $l \rightarrow \infty$

$$\int_{-l}^l f(t) dt \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \text{const} < +\infty$$

(м.к. $f(t)$ абсолютно непрерыв.)

$$\frac{\text{const}}{2l} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0, \text{ м.к. } \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0$$

т.е.

$$f(x) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[\underbrace{\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos[y(t-x)] dy}_{\cos yt \cos yx + \sin yt \sin yx} \right] dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos yt dt \right] \cos yx +$$

$$+ \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin yt dt \right] \sin yx dy =$$

$$= \int_0^{+\infty} [a(y) \cos xy + b(y) \sin xy] dy$$

$$a(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos ty dt$$

$$b(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin ty dt$$

Лекция 19.10.20

$$f(x) = \int_0^{+\infty} a(y) \cos(yx) + b(y) \sin(yx) dy \quad \left. \vphantom{\int_0^{+\infty}} \right\} \text{ — интеграл Фурье}$$

$a(y)$ — косинус преобразование Фурье функции f

$b(y)$ — синус преобразование Фурье

Замечание

Эти ф-лы очень похожи на ф-лы для разложения ф-ции в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \text{ где}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$b_n \rightarrow b(y)$$

$$a_n \rightarrow a(y)$$

2.2. Проблема о представимости функции в точке её интегралом Фурье

Опр. Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ кусочно-шаговой, если $\forall \varepsilon > 0$ эта функция f на промежутке $[-\varepsilon, \varepsilon]$ является кусочно шаговой в смысле рядов Фурье (раздел 1.6)

Теорема (о представимости ф-ции в точке её интегр. Фурье),

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ кусочно-шаговая, абсолютно интегр. функция, т.е.

$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$). Тогда $\forall x \in \mathbb{R}$ интеграл Фурье

$$\int_0^{+\infty} (a(y) \cos xy + b(y) \sin xy) dy = \frac{1}{2} (f(x+0) + f(x-0))$$

Док-во следует ввиду аналогии с док-вом теор. о представимости ф-ции в точке её ряда Фурье.

только теперь нужно

(* лемма Римана - Лебега для ∞ промежутка:

~~Если $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ абсолютно интегр.~~

Если $a \in \mathbb{R}$ и I - один из интервалов $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$.

и $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ - абсолютно интегрируема.

Тогда $\lim_{p \rightarrow \pm\infty} \int_I f(x) \cos px dx = \lim_{p \rightarrow \pm\infty} \int_I f(x) \sin px dx = 0$

$$= \lim_{p \rightarrow \pm\infty} \int_I f(x) e^{\pm i p x} dx = 0$$

2.3) Представление функций на полуоси её интегралами Фурье.

Пусть равенство $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $\forall x \in \mathbb{R}$ справедливо

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (a(y) \cos xy + b(y) \sin xy) dy, \text{ где}$$

$$a(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos xy dx \quad \text{и} \quad b(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin xy dx$$

Случай I Пусть ещё f -четная. Тогда $b(y) = 0$ (под интегралом нечётная функция)

$$a(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(x) \cos xy dx \quad (\text{под интегралом чётная функция})$$

$$\text{и} \quad f(x) = \int_0^{+\infty} a(y) \cos xy dy$$

$f(x) = \int_0^{+\infty} a(y) \cos xy dy$ и обратное косинус-преобразование ф-ции f

$$a(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(x) \cos xy dx \quad \text{прямое косинус-преобразование}$$

Случай II Пусть ещё f -нечетная функция. Тогда $a(y) = 0$

$$b(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(x) \sin xy dx \leftarrow \begin{matrix} \text{прямое} \\ \text{синус-преобразование} \end{matrix}$$

$$f(x) = \int_0^{+\infty} f(y) \sin xy \, dy \in \text{обратное синус-преобразование}$$

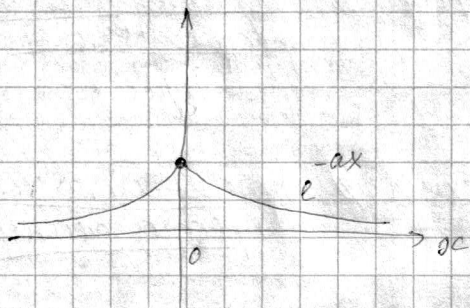
Случай III. Если $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, то мы можем продолжить её на всю числовую прямую $\mathbb{R}$ чётным образом (случай I) или нечётным образом (случай II)

(2.4.) Пример представления функции её интегралом Фурье.

Пусть $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ задана формулой

$$f(x) = e^{-ax}, \text{ где } a > 0, x > 0$$

Продолсим f чётным образом:



т.е. $f(x) = e^{-a|x|}, x \in \mathbb{R}$

Пока

$$a(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos xy \, dx \stackrel{\text{по таблице}}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos xy \cdot \frac{1}{(-a)} d(e^{-ax})$$

$$= -\frac{2}{a\pi} \left(\cos xy e^{-ax} \Big|_0^{+\infty} + y \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin xy \, dx \right) =$$

$$= -\frac{2}{a\pi} \left(-1 + y \int_0^{+\infty} \sin xy \cdot \frac{1}{(-a)} d(e^{-ax}) \right) = -\frac{2}{a\pi} \left(-1 + \right.$$

$$\left. + \frac{y}{(-a)} \cdot \left(e^{-ax} \sin xy \Big|_0^{+\infty} - y \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos xy \, dx \right) = \right.$$

$$= -\frac{2}{a\pi} \left(-1 - \frac{y}{a} \left(-y \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos xy \, dx \right) \right) =$$

$$= -\frac{2}{a\pi} \left(-1 + \frac{y^2}{a} \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos xy \, dx \right)$$

$$I = +\frac{1}{a} - \frac{y^2}{a^2} I \Rightarrow I \left(\frac{a^2 + y^2}{a^2} \right) = \frac{+1}{a}$$

$$I = \frac{+a}{a^2 + y^2}$$

т.е. $a(y) = \frac{2}{\pi} \frac{a}{a^2 + y^2}$

$\forall x \in [0, +\infty)$

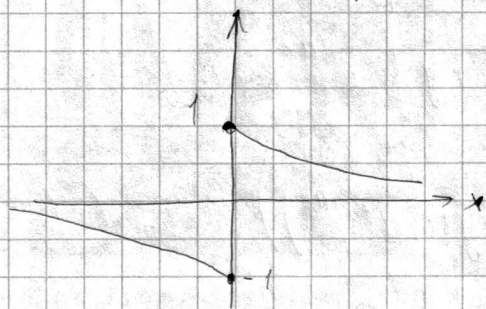
$$e^{-ax} = f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{a}{a^2 + y^2} \cos xy \, dy \Rightarrow$$

интеграл
Ланжаса

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{a^2 + y^2} \, dy = \frac{\pi}{2a} e^{-ax}$$

который известен
всех из математики!

Теперь продолжим $f = e^{-ax}$ $a > 0, x > 0$
 нечетными образом.



$x=0$ не является точкой непрерывности!

здесь интеграл Фурье равен не $f(x)$, а полуцелые преобразования слева и справа (по частям).

$$b(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin xy \, dx = \frac{2}{\pi} \frac{y}{a^2 + y^2}$$

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi} \frac{y}{a^2 + y^2} \sin xy \, dy = e^{-ax}$$

Это равенство верно $\forall x > 0$

но $\frac{1}{2}(f(0+0) + f(0-0)) = 0$ и $\int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi} \frac{y}{a^2 + y^2} \sin(0y) \, dy = 0$

т. е. равенство верно $\forall x \geq 0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{y \sin xy}{a^2 + y^2} \, dy = \frac{\pi}{2} e^{-ax}, \quad x > 0$$

Интеграл Лапласа

(2.5) Числовая Фурье в комплексной форме

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \int_0^{+\infty} (a(y) \cos xy + b(y) \sin xy) dy, \text{ где}$$

$$a(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos xy dx$$

$$b(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin xy dx$$

Из Т.Ф.К.Т. $\Rightarrow$ формула $\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$,

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

$$\Downarrow \quad f(x) = \int_0^{+\infty} (a(y) \frac{e^{ixy} + e^{-ixy}}{2} + b(y) \frac{e^{ixy} - e^{-ixy}}{2i}) dy$$

$$= \left\langle \frac{b(y)}{2i} = -i \cdot \frac{b(y)}{2} \right\rangle = \int_0^{+\infty} \left[\left(\frac{a(y) - i b(y)}{2} \right) e^{ixy} + \right.$$

$$\left. \left(\frac{a(y) + i b(y)}{2} \right) e^{-ixy} \right] dy \quad \text{---}$$

замена $y \rightarrow -y$

$$\int_0^{+\infty} \frac{a(-y) + i b(-y)}{2} e^{+ixy} dy =$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{a(y) - i b(y)}{2} e^{+ixy} dy$$

--- замена $b(-y) = -b(y)$

$a(y) = a(-y)$

т.к. $a(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tilde{x}) \cos \tilde{x} y d\tilde{x}$

косинус - четная, а больше y не меняется

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a(y) - i b(y)}{2} e^{+ixy} dy = \text{подставляем } a(y) \text{ и } b(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tilde{x}) (\cos \tilde{x}y - i \sin \tilde{x}y) d\tilde{x} \right) e^{+ixy} dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tilde{x}) e^{-i\tilde{x}y} d\tilde{x} \right) e^{ixy} dy \quad (*)$$

интеграл Фурье в комплексной форме

В связи с этой формулой введём обозначения

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ity} dt := \hat{f}(y) = \mathcal{F}_+[f(x)](y)$$

прямое преобразование Фурье функции f в точке y

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{+ixy} dy := \check{g}(x) = \mathcal{F}_-[g(y)](x)$$

обратное преобразование Фурье функции g в точке x

Поэтому формулу (*) можно переписать так:

$$f(x) = \hat{\hat{f}}(x) = \mathcal{F}_-[\mathcal{F}_+[f(x)](y)](x)$$

Аналогично

$$f(x) = \check{\check{f}}(x) = \mathcal{F}_+[\mathcal{F}_-[f(x)](y)](x)$$

обратное преобразование Фурье

Замечание: 1) Иногда преобразованием Фурье $\mathcal{F}$ не функции f , а ее само правило, которое сопоставляет ф-ции f функцию $\hat{f}$

2) В разных книгах можно увидеть разные определения преобразования Фурье. (константу $\frac{1}{2\pi}$ тащат в разные места и т.п.)

3) При изучении преобразования Фурье естественно рассматривать функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ (т.к. $f(x) \in \mathbb{C}$ уже комплексная)

$$f(x) = f'(x) + i f''(x), \text{ где } f'(x) = \operatorname{Re} f(x),$$

$$f''(x) = \operatorname{Im} f(x)$$

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{опр.}}{=} \int_a^b f'(x) dx + i \int_a^b f''(x) dx$$

[упр.] доказать, что ф-ла обращения справедлива и для $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

2.6. Пример вычисления прямого и обратного преобразования Фурье.

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задана формулой $f(x) = e^{-ax^2}$, где $a > 0$.

Найти прямое и обратное преобр.

Фурье в точке y .

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-ixy} dx$$