ОСНОВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Лектор — Виктор Алексеевич Александров

Программа курса лекций

(4-й семестр, лекции 32 ч., семинары 32 ч., экз.)

5. Геометрия пространств со скалярным произведением

5.1. Линейные пространства: определение, линейная зависимость векторов, размерность пространства, подпространство. Примеры линейных пространств и подпространств.

5.2. Нормированные линейные пространства: определение нормы, сходимость последовательности векторов, предельная точка множества, замыкание множества, замкнутое множество, плотное множество. Примеры плотного и неплотного множества в $\mathbb{R}$. Открытый и замкнутый шар, открытое множество. Сепарабельное пространство. Примеры сепарабельных нормированных пространств. Пример незамкнутого подпространства в бесконечномерном нормированном пространстве. Фундаментальная последовательность, полнота пространства. Банаховы пространства. Примеры полных и неполных нормированных пространств. Лебеговские функциональные пространства $L_p(G)$ как важнейший пример полных нормированных пространств: определение и свойства (без доказательства), в том числе — интегральные неравенства Гёльдера и Минковского, полнота и сепарабельность, плотность множества гладких функций.

5.3. Линейные пространства со скалярным произведением: определение и примеры. Неравенство Коши — Буняковского — Шварца в пространстве со скалярным произведением. Норма, порождённая скалярным произведением. Непрерывность скалярного произведения. Равенство параллелограмма. Гильбертово пространство: определение и примеры.

5.4. Ортогональность векторов. Угол между векторами. Процесс ортогонализации Грама — Шмидта.

5.5. Приближение векторами подпространства и ортогональное проектирование. Вектор наилучшего приближения. Лемма о существовании и единственности вектора наилучшего приближения. Ортогональная проекция вектора на подпространство.

Лемма об эквивалентности понятий «вектор наилучшего приближения» и «ортогональная проекция вектора». Ортогональное дополнение к подпространству. Прямая сумма подпространств. Примеры разложения пространства в прямую сумму подпространств. Теорема о разложении гильбертова пространства в прямую сумму подпространств.

5.6. Теорема об ортогональном проектировании на конечномерное подпространство (теорема Пифагора). Коэффициенты Фурье относительно ортонормированной системы. Ряд Фурье вектора из гильбертова пространства. Неравенство Бесселя.

5.7. Пополнение ортонормированной системы. Полная ортонормированная система. Гильбертов базис. Замкнутая ортонормированная система. Критерий полноты ортонормированной системы в сепарабельном гильбертовом пространстве. Равенство Парсеваля. Теорема о существовании гильбертова базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве (без доказательства).

5.8. Теорема Рисса — Фишера. Изоморфизм гильбертовых пространств: определение. Теорема об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств: формулировка и идея доказательства.

5.9. Тригонометрическая система функций как пример полной ортонормированной системы в $L_2[-\pi, \pi]$.

Литература: основная — 2, 8; дополнительная — 6, 7 (глава III), 9 (глава 1).

6. Ортогональные многочлены

6.1. Ортогональные многочлены как результат ортогонализации последовательности мономов: Определения весовой функции и весового лебеговского пространства. Идея построения ортогональных многочленов посредством ортогонализации последовательности мономов. Ортогональные многочлены: определение.

6.2. Общие свойства ортогональных многочленов, в том числе — однозначная определённость ортогональных многочленов их весом; чётность / нечётность многочлена с чётным весом; трёхчленная рекуррентная формула.

6.3. Свойства нулей ортогональных многочленов, в том числе — все нули простые и содержатся в промежутке ортогональности; два многочлена с последовательными номерами не могут иметь общего корня; нули многочленов перемежаются (последнее — без доказательства).

6.4. Классические ортогональные многочлены. Определения классических ортогональных многочленов. Стандартизация ортогональных многочленов. Примеры различных стандартизаций.

Производящая функция: определение. Уравнение Пирсона. Обзор основных свойств классических ортогональных многочленов (без доказательства).

6.5. Многочлены Лежандра: производящая функция, рекуррентные соотношения.

6.6. Многочлены Лежандра: дифференциальное уравнение, соотношения ортогональности.

6.7. Многочлены Лежандра: формула Родрига (без доказательства) и теорема о разложении функции в ряд по многочленам Лежандра (для обеих — только идея доказательства).

6.8. Мультипольное разложение кулонова потенциала. Дипольный момент.

Многочлены Эрмита и Лагерра (*изучаются только на семинарах*): производящая функция, рекуррентные соотношения, дифференциальное уравнение, соотношения ортогональности, формула Родрига. Разложение функций в ряды по многочленам Эрмита и Лагерра. Функции Эрмита и Лагерра.

Литература: основная — 4; дополнительная — 7 (глава VII, § 3).

7. Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах

7.1. Линейные операторы: определение, примеры и общие свойства.

7.2. Непрерывные и ограниченные операторы: определения и теорема об эквивалентности понятий непрерывного и ограниченного операторов.

7.3. Норма оператора: определение; лемма о трёх формулах, задающих норму оператора; теорема о шести свойствах нормы оператора; оценка нормы оператора, отображающего конечномерное пространство в конечномерное.

7.4. Сходимость операторов и операторные ряды: определение сходящейся последовательности операторов, свойства сходящихся последовательностей операторов. Теорема о полноте пространства ограниченных операторов (без доказательства). Определение операторного ряда и его суммы. Свойства сходящихся операторных рядов.

7.5. Обратимость оператора. Обратный оператор: определение обратимого оператора, образа оператора и обратного оператора. Свойства обратного оператора.

7.6. Теорема Неймана.

7.7. Спектр оператора. Определение собственного значения оператора и точечного спектра оператора. Определение резольвентного множества и резольвентного оператора. Теорема Банаха об обратном операторе (без доказательства). Определение непрерывного и остаточного спектра оператора. Определение спектра оператора. Простейшие свойства спектра, в том числе, то, что спектр является замкнутым множеством и содержится в замкнутом шаре, радиус которого равен норме оператора.

7.8. Линейные функционалы: определение и пример линейного функционала; определение ядра линейного функционала. Свойства ядра линейного функционала, в том числе то, что ядро линейного функционала всегда является подпространством; что ядро ненулевого линейного функционала имеет коразмерность один; и что линейный функционал непрерывен, если и только если его ядро замкнуто.

7.9. Определение сопряжённого пространства. Теорема Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала.

7.10. Бра- и кет-векторы: Введение бра- и кет-обозначений. Примеры использования бра- и кет-обозначений для нахождения разложения тождественного оператора и нахождения резольвентного оператора.

7.11. Оператор, сопряжённый к ограниченному: определение. Свойства оператора, сопряжённого к ограниченному. Пример нахождения оператора, сопряжённого к оператору, отображающему конечномерное пространство в конечномерное.

7.12. Теорема о применении сопряжённого оператора к нахождению спектра.

7.13. Ограниченные самосопряжённые операторы: определение; теорема о точечном спектре и ортогональности собственных векторов, отвечающих разным собственным значениям. Определение и примеры инвариантных подпространств. Теорема об инвариантном подпространстве. Теорема о норме самосопряжённого оператора (без доказательства).

7.14. Компактные операторы: определение и простейшие свойства. Теорема о существовании базиса из собственных векторов компактного самосопряжённого оператора (без доказательства).

Литература: основная — 3; дополнительная — 1, 6, 7 (глава IV, §§ 5 и 6), 9 (главы 7 и 8).

8. Интегральные уравнения

8.1. Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра и примеры задач, к ним приводящих, в том числе — сведение начальной

задачи для линейного обыкновенного дифференциального уравнения к интегральному уравнению Вольтерра.

8.2. Интегральный оператор Гильберта — Шмидта: определение, теоремы о компактности и об операторе, сопряжённом к оператору Гильберта — Шмидта.

8.3. Решение интегральных уравнений с вырожденным ядром. Определение вырожденного ядра. Сведение решение интегрального уравнения с вырожденным ядром к решению системы линейных алгебраических уравнений.

8.4. Альтернатива Фредгольма: формулировка для компактных операторов, доказательство только для операторов Гильберта — Шмидта с вырожденным ядром.

8.5. Уравнения с малым параметром: ряд Неймана; метод последовательных приближений. Определение повторного ядра. Теорема о повторном ядре оператора Гильберта — Шмидта.

8.6. Интегральные уравнения с симметричными ядрами: теорема Гильберта — Шмидта для интегральных операторов с симметричным ядром; разложение решения интегрального уравнения по собственным функциям ядра.

8.7. Разложение повторного ядра интегрального оператора по его собственным функциям. Билинейная формула. Теорема Мерсера (без доказательства).

Литература: основная — 5; дополнительная — 6, 7 (глава IX).

Литература

Учебные и методические пособия, изданные в НГУ, доступны в электронном виде на сайте кафедры <http://www.phys.nsu.ru/ok03>

1. *Абашеева Н. Л.* Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах в примерах и задачах: Метод. пособие. Новосибирск: НГУ, 2007.
2. *Александров В. А.* Геометрия пространств со скалярным произведением: Метод. пособие. Новосибирск: НГУ, 1995.
3. *Александров В. А.* Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах: Метод. пособие. Новосибирск: НГУ, 1996.
4. *Александров В. А.* Ортогональные многочлены: Метод. указания. Новосибирск: НГУ, 1993.
5. *Александров В. А., Колесников Е. В.* Интегральные уравнения: Метод. указания. Новосибирск: НГУ, 1993.
6. *Антоневич А. Б., Князев П. Н., Радыно Я. В.* Задачи и упражнения по функциональному анализу. Минск: Выш. шк., 1978.

7. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.
8. Подвигин И. В. Гильбертово пространство в примерах и задачах: Учебно-метод. пособие. Новосибирск: НГУ, 2012.
9. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. М.: Мир, 1982. Т. 1.

План семинаров

1-й семинар. — Простейшие свойства сходимости в гильбертовом пространстве: всякая сходящаяся последовательность фундаментальна, ограничена и имеет не более одного предела; всякое конечномерное подпространство замкнуто. Парадоксальные свойства бесконечномерных гильбертовых пространств: существование незамкнутых подпространств и возможность поместить бесконечно много попарно непересекающихся шаров фиксированного радиуса в единичный шар.

2-й семинар. — Вычисление углов в гильбертовом пространстве. Кривая Винера. Поляризационные тождества.

3-й семинар. — Процесс ортогонализации Грама — Шмидта. Ортогональное проектирование на конечномерные и бесконечномерные подпространства. Задача наилучшего приближения.

4-й семинар. — Нахождение замыкания подпространства. Нахождение ортогонального дополнения к подпространству. Изоморфизм гильбертовых пространств.

5-й семинар. — Общие свойства ортогональных многочленов. Многочлены Эрмита: производящая функция; вывод и использование рекуррентных формул.

6-й семинар. — Многочлены Эрмита: вывод и использование соотношений ортогональности и дифференциального уравнения; разложение функций в ряды по многочленам Эрмита.

7-й семинар. — Многочлены Лагерра: производящая функция; вывод и использование рекуррентных формул, соотношений ортогональности и дифференциального уравнения; разложение функций в ряды по многочленам Лагерра.

8-й семинар. — Многочлены Лежандра: применение производящей функции, рекуррентных формул и соотношений ортогональности; разложение функций в ряды по многочленам Лежандра.

9-й семинар. — Вычисление нормы ограниченного оператора и оператора, обратного к данному.

10-й семинар. — Линейные функционалы. Бра- и кет-векторы.

11-й семинар. — Сопряжённый оператор. Спектр и резольвента ограниченного оператора.

12-й семинар. — Спектр и резольвента ограниченного оператора. Применение сопряжённого оператора к нахождению спектра.

13-й семинар. — Компактные операторы. Задачи на спектр компактных и компактных самосопряжённых операторов.

14-й семинар. — Сведение дифференциальных уравнений к интегральным и наоборот. Решение интегральных уравнений с вырожденным ядром.

15-й семинар. — Альтернатива Фредгольма. Повторные ядра и резольвента интегрального уравнения.

16-й семинар. — Собственные значения и собственные функции интегральных уравнений с симметричным ядром. Представление решения неоднородных уравнений Фредгольма с симметричным ядром в виде ряда по собственным функциям ядра.

Задания по основам функционального анализа

Задание 4 (сдать до 15 марта)

Геометрия пространств со скалярным произведением

1. Докажите, что в любом комплексном гильбертовом пространстве скалярное произведение можно выразить через норму с помощью поляризационного тождества

$$(x, y) = \frac{1}{4} \left[(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) - i(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2) \right].$$

2. Докажите, что в пространстве $L_p[a, b]$ можно ввести скалярное произведение, согласованное с нормой этого пространства, если и только если $p = 2$. Напомним, что пространство $L_p[a, b]$ определено для всех $p \geq 1$ и состоит из функций $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ для которых интеграл $\int_a^b |f(t)|^p dt$ сходится. При этом, по определению полагают

$$\|f\|_{L_p[a,b]} = \left\{ \int_a^b |f(t)|^p dt \right\}^{1/p}.$$

3. Найдите углы треугольника, образованного векторами $f_1(t) = 0$, $f_2(t) = t$, $f_3(t) = t^2$ в евклидовом пространстве $L_2[-1, 1]$.

4. Пусть L обозначает подпространство пространства $L_2[-1, 1]$, натянутое на функции $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = t$ и $f_3(t) = t^2$. Найдите ортогональную проекцию функции $g(t) = e^{-t}$ на L .

5. В пространстве $L_2[-1, 1]$ найдите ортогональное дополнение к подпространству S , состоящему из функций $f(t)$, равных нулю при $-1 \leq t \leq 1/2$.

6. Убедитесь, что система функций $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin t$, $\dots$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nt$, $\dots$ является ортонормированной в $L_2[-\pi, \pi]$, но не является базисом этого пространства.

Ортогональные многочлены

7. Как известно, многочлены Чебышёва первого рода $T_n(x)$ ортогональны на промежутке $(-1, 1)$ с весом $1/\sqrt{1-x^2}$. Для каждого $n = 0, 1, 2, \dots$ докажите, что

(а) функция $\cos(n \arccos x)$ является многочленом степени n , и

(б) многочлен $T_n(x)$ пропорционален $\cos(n \arccos x)$, т. е. докажите равенство $T_n(x) = C_n \cos(n \arccos x)$, где C_n — некоторая постоянная.

8. Существуют ли промежуток (a, b) и вес $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что последовательность мономов $1, x, \dots, x^n, \dots$ является последовательностью ортогональных многочленов на промежутке (a, b) с весом h ? Ответ обоснуйте.

9. Докажите, что $H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}$ для всех $n = 0, 1, 2, \dots$. Здесь (а также в задачах 10 и 11) $H_n(x)$ — n -й многочлен Эрмита, стандартизованный с помощью производящей функции, т. е. $H_n(x)$ определяется как коэффициент в разложении

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n.$$

Задание 5 (сдать до 25 апреля)

10. Докажите, что если n чётно, то $H_n(x)$ является чётной функцией от x , а если n нечётно, то — нечётной.

11. Вычислите интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x H_n(x) H_{n+1}(x) dx.$$

12. Разложите в ряд по многочленам Эрмита функцию $\sin 2x$. Обоснуйте сходимость полученного ряда.

13. Вычислите интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha+1} [L_n^\alpha(x)]^2 dx.$$

Здесь $L_n^\alpha(x)$ — n -й многочлен Лагерра, стандартизованный с помощью производящей функции, т. е. $L_n^\alpha(x)$ — это коэффициент тейлоровского разложения по переменной t с центром в нуле производящей функции многочленов Лагерра:

$$w(x, t, \alpha) = \frac{e^{-xt/(1-t)}}{(1-t)^{\alpha+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) t^n.$$

14. Вычислите интеграл

$$\int_{-1}^1 (1-x^2) [P_n'(x)]^2 dx,$$

где $P_n(x)$ — n -й многочлен Лежандра, стандартизованный с помощью производящей функции, т. е. $P_n(x)$ определяется как коэффициент в разложении

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n.$$

Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах

В задачах 15–21 $M_a : \ell_2 \rightarrow \ell_2$ обозначает «диагональный» линейный оператор, действующий по правилу:

$$M_a : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (a_1x_1, a_2x_2, a_3x_3, \dots),$$

где $a = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ — фиксированная ограниченная последовательность комплексных чисел.

15. Докажите, что оператор M_a непрерывен и найдите его норму.
16. Выясните является ли оператор M_a обратимым, и если является, то найдите M_a^{-1} .
17. Опишите сопряжённый к M_a оператор и выясните, когда оператор M_a самосопряжён. Выясните, когда оператор M_a унитарен.
18. Найдите точечный спектр оператора M_a .

Задание 6 (сдать до 30 мая)

19. Найдите непрерывный спектр оператора M_a .
20. Найдите остаточный спектр оператора M_a . Укажите резольвентное множество оператора M_a .
21. В каком из двух случаев оператор M_a компактен: если $a_n = \sin \frac{\pi n}{2}$ или если $a_n = (-1)^n n^{-1}$?
22. Покажите, что используя «бра» и «кет» обозначения оператор проектирования P на подпространство, натянутое на единичный вектор x , можно задать формулой $P = |x\rangle\langle x|$.
23. Докажите, что для любых самосопряжённых ограниченных операторов $A : H \rightarrow H$ и $B : H \rightarrow H$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{2} |([A, B]x, x)| \leq \|Ax\| \cdot \|Bx\|,$$

где $[A, B] = AB - BA$ — коммутатор операторов A и B .

Отметим на будущее, что в квантовой механике вводят обозначение $\langle A \rangle_x = (Ax, x)$, переписывают предыдущее неравенство в виде

$$\langle A^2 \rangle_x \langle B^2 \rangle_x \geq \frac{1}{4} \langle [A, B] \rangle_x^2$$

и интерпретируют его как принцип неопределённости Гейзенберга. Докажите последнее неравенство. (Для полноты отметим, что наиболее интересные с точки зрения квантовой механики операторы не являются ограниченными, так что пока вы доказали лишь частный случай принципа неопределённости Гейзенберга.)

Интегральные уравнения

24. Составьте интегральное уравнение, отвечающее задаче Коши

$$\begin{aligned}x'''(t) + tx(t) &= e^t, \\ x(0) = 1, \quad x'(0) &= 1, \quad x''(0) = 0.\end{aligned}$$

25. Решите интегральное уравнение

$$x(t) = 5 \sin t + 3 - 4 \int_0^t (t-s)x(s) ds,$$

сведя его к обыкновенному дифференциальному уравнению.

26. Найдите все решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром

$$x(t) - \int_{-1}^1 (ts + \mu)x(s) ds = \cos 2\pi t.$$

Рассмотрите все возможные значения параметра μ .

27. Пусть $Ax(t) = \int_0^1 K(t, s)x(s) ds$, где

$$K(t, s) = \begin{cases} (t+1)s, & \text{если } 0 \leq t \leq s; \\ (s+1)t, & \text{если } s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Найдите характеристические значения и собственные функции интегрального уравнения $x(t) - \mu Ax(t) = 0$, сведя его к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения.

Программу и задания
по основам функционального анализа
составил д.ф.-м.н., профессор В. А. Александров
1 февраля 2021 г.

Правила аттестации студентов по «Основам функционального анализа»

§1. Контроль работы в семестре

(1) В течение семестра студенту настоятельно рекомендуется сдать своему семинаристу в устной форме все 27 задач из приведённых выше заданий.

(2) За каждую задачу, полностью сданную в срок, студент получает 6 баллов. За задачу, сданную (полностью или частично) после установленного срока, студент получает ноль баллов.

(3) В конце семестра семинарист оценивает работу каждого студента из своей группы и добавляет ему от 0 до 50 баллов в зависимости от того, насколько активно студент решал задачи у доски, делал домашние задания, решал контрольные работы и т. п.

(4) Сумма баллов, начисленных студенту в соответствии с пунктами (2) и (3) называется «баллами за работу в семестре». Она сообщается всем студентам до проведения консультации через сайт кафедры <http://www.phys.nsu.ru/aleksandrov/teaching.html> и учитывается при выставлении оценки за экзамен.

(5) Приём задач из задания семинаристами заканчивается с окончанием зачётной сессии, т. е. ориентировочно 30-го мая 2021 года.

§2. Проведение экзамена в очной форме

(6) «Автоматов» и досрочных экзаменов не бывает.

(7) Студент может сдавать экзамен только в тот день и только в той аудитории, которые указаны в расписании экзаменов для его группы. При наличии уважительной причины и по предварительному согласованию с лектором в особых случаях допускается сдача экзамена с другой группой. Примером уважительной причины может служить поездка на Всероссийскую студенческую олимпиаду по теоретической механике.

(8) Поскольку по «Основам функционального анализа» не предусмотрен зачёт, то к сдаче экзамена допускаются все студенты (даже те, кто не сдал всех задач из приведённых выше заданий).

(9) Экзаменационный билет содержит три вопроса. Первый вопрос одинаков во всех билетах и выглядит так: «Сдача задач из заданий и блиц-опрос». Два других вопроса билета являются теоретическими вопросами (в частности, они не содержат задач) из программы курса. Список теоретических вопросов, выносимых на экзамен, выкладывается на сайт кафедры <http://www.phys.nsu.ru/aleksandrov/teaching.html> до проведения консультации.

(10) Первый вопрос билета «Сдача задач из заданий и блиц-опрос» нужно отвечать без подготовки. Решения несданных задач из заданий нужно принести с собой на экзамен на листочках. По этим листочкам нужно сразу сдавать задачи. На это отводится не более 30 минут. Если в течение 30 минут студенту не удалось сдать все долги, то за первый вопрос билета ему ставится оценка «неудовлетворительно», но из списка его долгов вычёркиваются сданные задачи. Если студент сдал все задачи из заданий до прихода на экзамен или ликвидировал все долги в течение отведённых для этого 30 минут, то в рамках ответа на первый вопрос он, опять же без подготовки, отвечает на блиц-опрос. Блиц-опрос состоит из 3–5 вопросов на определения и формулировки теорем по выбору экзаменатора. Предполагается, что это самые базовые, многократно использовавшиеся в данном курсе определения и теоремы. Обычно они выбираются экзаменатором из тем, не вошедших во второй и третий вопросы билета. По результатам блиц-опроса баллы не начисляются, однако студент, не ответивший на все вопросы блиц-опроса получает оценку «неудовлетворительно» за первый вопрос билета.

(11) Если студент ответил на какой-то вопрос билета (например, на первый) на оценку «неудовлетворительно», то ему не нужно отвечать на следующие вопросы билета. Для него экзамен заканчивается, а в экзаменационную ведомость ставится оценка «неудовлетворительно».

(12) Студент, ответивший первый вопрос билета на положительную оценку, получает один час на подготовку к двум оставшимся вопросам билета.

(13) При подготовке к ответу на второй и третий вопросы билета можно пользоваться только собственной головой. Другими словами, при подготовке к ответу на второй и третий вопросы билета запрещается пользоваться какой-либо литературой, конспектами, шпаргалками, мобильными телефонами и подсказками товарищей. Нарушающие это правило будут удалены с экзамена.

(14) Выходить из аудитории до начала ответа на второй и третий вопросы билета нельзя (точнее — выйти можно, а вот снова войти уже нельзя).

(15) Ответ на второй и третий вопросы билета оценивается по пятибалльной системе: «пятёрка» ставится за полный и правильный ответ как на вопрос билета, так и на сопутствующие вопросы преподавателя; «четвёрка» ставится за правильные формулировки всех определений и теорем, и объяснение основных идей доказательства (при этом допускается, что доказательство не доведено до конца);

«тройка» ставится за правильные формулировки всех определений и теорем из билета (при этом допускается, что о доказательстве не сказано ничего); «двойка» ставится за незнание хоть одной из теорем или хоть одного из важных (т. е. многократно используемых в курсе) определений.

(16) Оценки, полученные за ответ на второй и третий вопросы билета, конвертируются в баллы следующим образом: «пятерка» — 200 баллов; «четвёрка» — 100 баллов, «тройка» — 0 баллов.

(17) В случае необходимости преподаватель может заменить дополнительный / уточняющий вопрос задачей. Например, вместо того, чтобы спросить «что называется спектром оператора» он может попросить найти спектр тождественного оператора. На экзамене не бывает задач, требующих сложных вычислений или нестандартных подходов к решению.

(18) После того, как студент ответил (не на «неудовлетворительно») на все вопросы билета, все заработанные им баллы суммируются (т.е. баллы за ответы на второй и третий вопросы билета складываются с баллами за работу в семестре). В ведомость (и зачётку) выставляется итоговая оценка за весенний семестр по курсу «Основы функционального анализа», определяемая следующим образом: «отлично» — если сумма баллов не меньше 500; «хорошо» — если сумма баллов от 300 до 499; «удовлетворительно» — если сумма баллов от 100 до 299; «неудовлетворительно» — если сумма баллов менее 100.

§3. Проведение экзамена в дистанционной форме

(19) Дистанционный экзамен проводится в Google Meet и организуется так, чтобы максимально следовать правилам очного экзамена, изложенным в § 2. Но есть и отличия, главные из которых изложены ниже в пунктах (20)–(25).

(20) При проведении экзамена в дистанционной форме лектор заранее выставляет каждому студенту предварительную оценку. При этом он опирается на баллы, заработанные студентом в семестре и отзывы семинаристов. Студент об этой оценке не знает до прихода на экзамен.

(21) Экзамен в дистанционной форме проводит модератор. Он же ведёт видео-запись своей встречи. В назначенный расписанием экзаменов день и час студенты заходят в Google Meet на встречу, открытую модератором. Вызвав очередного студента, модератор просит его представиться и сообщает ему его предварительную оценку. Если студент согласен с этой оценкой, то для него экзамен

заканчивается, а предварительная оценка выставляется в экзаменационную ведомость. Если студент не согласен со своей предварительной оценкой, то она забывается и больше никогда не используется. Студенту, отказавшемуся от своей предварительной оценки, модератор предлагает выбрать билет с помощью датчика случайных чисел и назначает экзаменатора (т.е. сообщает код встречи, открытой экзаменатором в Google Meet; экзаменатор ведёт видеозапись своей встречи).

(22) Перейдя на Google Meet встречу с экзаменатором, студент отвечает на билет в соответствии с пунктами (10)–(18). При этом сканы своих записей он выкладывает в определённую папку на Google Disk и в процессе ответа показывает их экзаменатору, демонстрируя ему свой экран.

(23) При проведении экзамена в дистанционной форме студенту даётся 60 минут для подготовки к ответу на второй и третий вопросы билета. При этом ему разрешается пользоваться любой литературой, но не подсказками других людей. При ответе оцениваются не столько правильность и полнота записей, сделанных во время подготовки к ответу, сколько знания предмета, т.е. способность комментировать написанное и отвечать на уточняющие вопросы.

(24) Предусмотрена апелляция. Это значит, что если студент считает, что ему несправедливо занизили оценку, он может изложить свои претензии в электронном письме на адрес лектора <v.aleksandrov@g.nsu.ru> и (под копиру) заведующего кафедрой — Александра Петровича Ульянова <a.ulyanov@g.nsu.ru>. Важно, что эта претензия должна быть направлена в день экзамена не позднее 24:00 по новосибирскому времени. В течение трёх дней видео-запись ответа студента просмотрена лектором или другим преподавателем кафедры по выбору заведующего кафедрой. О принятом по результатам апелляции решении студент будет немедленно проинформирован по электронной почте.

(25) Лектор оставляет за собой право в течение трёх дней аннулировать результат экзамена конкретного студента в случае грубого нарушения им правил проведения экзамена. Примерами грубого нарушения могут служить такие ситуации: под именем данного студента на экзамен пришёл другой человек; или студент получил от модератора один билет, а экзаменатору стал отвечать совсем другой билет. Аннулирование результата экзамена производится по результатам просмотра лектором видео-записи ответа студента. Об аннулировании результата экзамена лектор сообщает и студенту, и деканату не позднее, чем через три дня после экзамена.

§4. Проведение пересдачи

(26) Пересдача проводится по тем же правилам и тем же билетам, что и основной экзамен.

(27) На пересдаче долг по задачам из заданий состоит из задач, не сданных в течение семестра и на основном экзамене.

§5. Особые ситуации

(28) При необходимости и наличии уважительной причины семинарист может продлить срок приёма заданий как всей группе (например, если из-за праздников пропало занятие и студенты ещё не решали в классе задачи, аналогичные задачам из задания), так и отдельному студенту (например, в случае его продолжительной болезни или командировки для участия в студенческой олимпиаде). В любом случае продление срока должно быть согласовано с лектором.

(29) Все конфликтные, спорные и неоднозначные ситуации, возникающие при изучении курса «Основы функционального анализа», урегулирует лектор. Это касается как работы в семестре, так и сдачи экзамена, и проведения пересдачи.

Правила аттестации студентов
по «Основам функционального анализа»
составил д.ф.-м.н., профессор В. А. Александров.
Они утверждены на заседании кафедры
высшей математики физического факультета.