Второй семестр 03.02.2021

Лекция 17.

§5 Линейные пространства со скалярным произведением.

5.1. Линейные пространства.

<u>ОПР</u> Линейным (векторным) пространством над полем вещ или комплексных чисел наз-ся мн-во L (его элементами наз-ся векторами) в котором введены две операции

- сложение векторов $x, y \in L$ (ее результат обозн $x+y \in L$)
- умножение вектора $x \in L$ на число $\alpha \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ (ее результат обозначают через $\alpha x \in L$), кот. удовлетвор след условиям.

I. (абелева группа по сложению)
1. коммутативность сложения $x+y=y+x \ \forall x, y \in L$
2. ассоциативность сложения $(x+y)+z=x+(y+z) \ \forall x,y,z \in L$
3. (существование нуля) $\exists 0 \in L: x+0=x \ \forall x \in L$
4. (существование обр. элемента) $\forall x \in L: \exists (-x) \in L; \ x+(-x)=0$

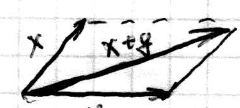
II.
1) (ассоциативность относ. умножения на число) $\alpha \cdot (\beta x)=(\alpha\beta)x \ \forall x \in L \ \forall \alpha, \beta$ - числа.
2. (дистрибутивность умножения отн сложения чисел) $(\alpha+\beta)\cdot x=\alpha x+\beta x \ \forall x \in L \ \forall \alpha, \beta$ - числа
3. (дистрибутивность умножения относ. сложения векторов) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y \ \forall x, y \in L, \ \forall \alpha$ - числа
4. (унитарность) $1 \cdot x = x \ \forall x \in L$

<u>Задача</u>: Док-ть, что обратный элемент $(-x)$ определен ед. образом.

Примеры: лин. пространств.

(1) Мн-во направленных отрезков в $\mathbb{R}^3$ отложенных от одной точки.

• Сложение определяется по правилу паралл.



• Умножение

(2) $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n=\{(x_1, \ldots, x_n) \mid \forall k=1 \ldots n \ \ x_k \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$

Сложение определяется покоординатно. $(x+y)=(x_1+y_1, x_2+y_2 \ldots x_n+y_n)$

умножение - тоже покоординатно

$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$

(3). $l_2 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \mid \forall k = 1, 2, \dots \ x_k \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) и при этом $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty\}$.

Сложение и умножения определяются покоординатно. Почему $x+y \in l_2$, если $x, y \in l_2$?

$\alpha x \in l_2$ - ? Вопрос 2. $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha x_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha|^2 \cdot |x_k|^2 = |\alpha|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < +\infty$

Вопрос 1: $|x_k + y_k|^2 \leq (|x_k| + |y_k|)^2 = |x_k|^2 + \underbrace{2|x_k| \cdot |y_k|}_{\leq |x_k|^2 + |y_k|^2} + |y_k|^2 \leq$ т.к. $(|x_k| - |y_k|)^2 \geq 0$

$\leq 2|x_k|^2 + 2|y_k|^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^2 \leq$

$\leq 2\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 < +\infty \Rightarrow x + y \in l_2$ ч.т.д.

Задача: Проверить выполнение аксиом I и II для пространства l_2

(4) $C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) $\mid f$ - непрерывно

$\left.\begin{array}{l}(f+g)(t) = f(t) + g(t) \\ (\alpha f)(t) = \alpha \cdot f(t)\end{array}\right\}$ Сложение и умножение определяется поточечно.

(5). $S(\mathbb{R}^n)$ - совокупность всех б.у функций в $\mathbb{R}^n$ с поточечно определенными операциями сложения и умножения.

Примеры множеств, не явл. линейными пространствами:

(1) $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 = 1\}$. - ед. сфера n мерная в $\mathbb{R}^{n+1}$ имеющая центр в (.) O

(2) Простр-во Лобачевского.

<u>ОПР</u> Конечный набор векторов $x, y, \dots, z \in L$ наз-ся линейно независимым, если из того, что $\alpha x + \beta y + \dots + \gamma z \overset{=0}{}$ ~~равен нулю~~ для каких-то чисел $\alpha, \beta, \dots \gamma$ следует, что $\alpha = \beta = \dots = \gamma = 0$.

Иначе векторы $x, y, \dots, z$ наз-ся линейно зависимыми.

<u>ОПР</u> Бесконечное множество векторов $x, y, \dots, z \dots$ лин. пр-в L наз-ся линейно независимым, если любое его конечное

подмножество является линейно независимым. Иначе бесконечное множество векторов наз-ся линейно зависимым.

ОПР. Говорят, что размерность лин. пространства L конечная и равна n, если в L существует n лин независимых векторов и всякие $(n+1)$ векторов из L явл. лин. зависимыми.

Обозн. $\dim L = n$

ОПР Говорят, что размерность пр-ва L равна бесконечности (или L - бесконечномерно), если $\forall n$ в L $\exists n$ линейно незав. векторов. Обозн. $\dim L = \infty$.

Примеры: (1) $\dim \mathbb{R}^n = \dim \mathbb{C}^n = n$

(2) $\dim l_2 = \infty$

$\forall k$ положим $\vec{x}_k = (0, \ldots, 0, \overset{k\text{-ое место}}{1}, 0, \ldots) \in l_2$. Убедимся, что $\forall n$ конечный набор векторов $x_1, x_2, \ldots x_n$ явл. линейно незав.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ - произвольные числа, причем

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, 0, 0 \ldots) = (0, 0, 0 \ldots, 0) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0 \Rightarrow \dim l_2 = \infty$

Задача: Док-ть, что $\dim C[a, b] = \infty$.

ОПР Мн-во $M \subset L$ - линейное прост. называется подпространством лин. пространства L, если M само является лин. пространством относительно тех операций сложения векторов и умножения вектора на число, кот ~~задает~~ заданы в L.

Примеры: (1) В любом лин. пространстве L есть подпространства $\{0\}$ и L. Они называются тривиальными подпространствами.

(2) Совокупность всех многочленов является подпространством в $C[a; b]$.

(5.2) Нормированные линейные пространства

ОПР Пусть L - линейное пространство. Функцию

$\|\cdot\| : L \to [0,+\infty)$ называют нормой, если выполнены след условия (кот называют аксиомами нормы):

(1) Неотрицательность и невырожденность нормы $\|x\| \geq 0 \ \forall x \in L$ причём $\|x\| = 0$ если и только если $x = 0$

(2) (положительная однородность нормы): $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
$\forall x \in L$ и $\forall \alpha$ - числа

(3) (неравенство треугольника): $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in L$

<u>Примеры</u> нормированных пространств.

(1) L - простр-во, состоящая из направленных отрезков в $\mathbb{R}^3$, отложенных из одной точки. $\|x\|$ = длинна направленного отрезка.

(2) В $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ любая из следующих функций задает норму:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}, \quad \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \quad \|x\|_\infty = \max_{k=1,\dots,n} |x_k|$$

Евклидова норма　　　　Чебышёвская норма

Док-ть, что Чебышёвская норма удовл 3 аксиомам

10.02.2021

Лекция 18:

(3) В l_2 следующая формула задает норму $\|x\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}$

(4) В $C[a,b]$ следующая формула задает норму

$$\|f\| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

<u>ОПР</u> Говорят, что посл-сть точек $x_1 \dots x_n \dots$ лин. нормированного простр-ва L, сходятся к точке $x_0 \in L$, если $\|x_n - x_0\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Обозн: $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \quad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$

<u>ОПР</u> Пусть M - мн-во в нормированном лин. простр. L. Говорят, что $x \in L$ явл предельной точкой мн-ва M, если $\exists x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ в L такая, что: (1) $\forall k \ x_k \in M$, (2) $\forall k \ x_k \neq x$, (3) $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x$

<u>ОПР</u> Замыканием множества $M \subset L$ называют объединение мн-ва M и мн-ва всех предельных точек мн-ва M

<u>Обозн</u>. ~~$\overline{M}$~~ или $cl\, M$

<u>ОПР</u> Пусть L - нормированное пространство $x_0 \in L$, $r \geq 0$

$B(x_0,r)=\{x\in L: \|x-x_0\|<r\}$ - открытый шар, радиуса r с центром x_0

$\overline{B}(x_0,r)=\{x\in L: \|x-x_0\|\le r\}$ - замкнутый шар, радиуса r с центром x_0

$S(x_0,r)=\{x\in L: \|x-x_0\|=r\}$ - сфера, радиуса r с центром в x_0

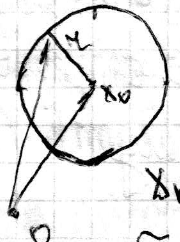
Задача: Док-ть $cl\, B(x_0,r)=\overline{B}(x_0,r)$. $\forall r>0$

Док-во: $\cancel{cl\, B(x_0,r)}$ $B(x_0,r) \underset{\text{по опред.}}{\subseteq} cl\, B(x_0,r) \underset{\text{док-ть}}{\subset} \overline{B}(x_0,r)$

Пусть $\tilde{x}\in cl\, B(x_0,r)$. Тогда $\exists\, x_1,x_2,\dots,x_n,\dots\in B(x_0,r)$

$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \tilde{x}$. Тогда $\forall n$ $\|x_0-\tilde{x}\| = \underset{\pm x_n}{\|(x_0-x_n)+(x_n-\tilde{x})\|} \overset{\text{нер. }\Delta}{\le} \|x_0-x_n\|+\|x_n-\tilde{x}\|\le$

$\le r$ $\forall$ достаточно больших $n \Rightarrow \|x_0-\tilde{x}\|\le r \Rightarrow \tilde{x}\in\overline{B}(x_0,r) \Rightarrow cl\, B(x_0,r)\subset \overline{B}(x_0,r)$



Принадлежат ли замыканию открытого шара точки сферы $S(x_0,r)$? Пусть $\tilde{x}\in S(x_0,r)$. Положим

$x_k=(1-\frac{1}{k})(\tilde{x}-x_0)+x_0$ Проверяем св-во (1) $x_k\in B(x_0,r)$?

$\tilde{x}=x_0+(\tilde{x}-x_0)$

$$\|x_k-x_0\| = \|(1-\tfrac{1}{k})(\tilde{x}-x_0)+x_0-x_0\| = (1-\tfrac{1}{k})\|\underbrace{\tilde{x}-x_0}_{r}\| \le r$$

(2) $x_k\ne\tilde{x}$? ! Пусть $x_k=\tilde{x} \Leftrightarrow (1-\frac{1}{k})(\tilde{x}-x_0)+x_0 = \tilde{x} \Leftrightarrow (1-\frac{1}{k})(\tilde{x}-x_0)=$

$=\tilde{x}-x_0 \Rightarrow (\tilde{x}-x_0)-\frac{1}{k}(\tilde{x}-x_0) \Rightarrow \tilde{x}-x_0=0$ т.е $\tilde{x}=x_0$

$\|\tilde{x}-x_0\|=0$

(3) $x_k\xrightarrow[k\to\infty]{} x$? $\Leftrightarrow \|x_k-\tilde{x}\| = \|(1-\frac{1}{k})(\tilde{x}-x_0)+x_0-\tilde{x}\| =$

$=\|(\tilde{x}-x_0)-\frac{1}{k}(\tilde{x}-x_0)+(x_0-\tilde{x})\| = \frac{1}{k}\|\tilde{x}-x_0\| = \frac{r}{k}\xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Задачи для меня:

а) Верно ли равенство, что $cl\, B(x_0,r)=\overline{B}(x_0,r)$ для $r=0$

б) Док-ть $cl\, S(x_0,r)=S(x_0,r)$ $\forall r\ge 0$

ОПР Пусть L - нормированное пр-во и $M\subset L$, Тогда M наз-ся

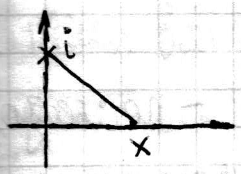
- замкнутым, если $cl\, M=M$

- плотным (или всюду плотным) в L, если $cl\, M=L$

Примеры (1) $\mathbb{R}$ - множество рациональных чисел плотно в $\mathbb{R}$ с нормой $\|x\|=|x|$ В самом деле $\forall x\in\mathbb{R}$ $\exists\, x_1,\dots,x_n,\dots\in\mathbb{Q}$ такая, что $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{} x$, а значит $cl\,\mathbb{Q}=\mathbb{R}$. Как построить x_n?. $\forall n$ возьмем в качестве x_n любое рацион. число из интервала $[x, x+\frac{1}{n}]$

Тогда $\|x_n-x\|=|x_n-x|<\frac{1}{n}$

(2) Множество $\mathbb{R}$ не плотно в $\mathbb{C}$ (например $\|x-i\| = |x-i| \geq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$



Задача для меня: Док-ть, что $\mathbb{Q}$ не замкнуто в $\mathbb{R}$.

ОПР Нормированное пр-во L наз-ся СЕПАРАБЕЛЬНЫМ, если в L существует счётное, плотное подмножество.

Примеры сепарабельных пространств (1) $\mathbb{R}$ ($\mathbb{Q}$ явл. счётным плотным подмножеством в $\mathbb{R}$)

(2) $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ (счётным плотным подмножеством явл. множество векторов с рациональными коорд)

(3) ℓ_2 (4) $C[a,b]$

Утв: Сходящаяся последовательность может иметь только один предел, т.е если $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ и $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \tilde{x}$, то $x = \tilde{x}$

Док-во: $\|x-\tilde{x}\| \underset{\pm x_n}{=} \|(x-x_n)+(x_n-\tilde{x})\| \overset{\text{нер}\Delta}{\leq} \underbrace{\|x-x_n\|}_{\to 0,\ n\to\infty} + \underbrace{\|x_n-\tilde{x}\|}_{\to 0,\ n\to\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \|x-\tilde{x}\| = 0 \Rightarrow x-\tilde{x} = 0 \Rightarrow x = \tilde{x}$

Задача для меня: Док-ть, что в любом нормированном прост-ве любое конечномерное подпростр замкнуто.

Пример: (незамкнутое подпространство в бескон. нормиров. прост-ве)

$L = C[a,b]$ с нормой $\|f\| = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$, $M \subset L$ - множество всех многочленов. Пусть $g(x) = \sin x$. Убедимся, что g является предельной точкой мн-ва M, но $g \notin M$. Это и будет означать, что M не замкнуто. ($\sin x$ - не многочлен)

По формуле Тейлора: $g(x) = \underbrace{g(0) + \frac{g'(0)}{1!}x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n}_{P_n(x)} + \frac{g^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}x^{n+1}$ где $t \in (0,x)$

Убедимся, что $P_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x)$, т.е $\|P_n - g\|_{C[a,b]} \to 0$

$\|g-P_n\| = \max\limits_{x\in[a,b]} |g(x)-P_n(x)| = \max\limits_{\substack{x\in[a,b]\\ t\in[a,b]}} \left|\frac{g^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \leq \frac{\max|x^{n+1}|}{(n+1)!} \leq$

$$\leq \frac{\max\{|a|,|b|\}}{(n+1)!} \leq \frac{(\max\{|a|,|b|\})^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{A^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ОПР Пусть L - нормированное пространство, $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ - последовательность векторов из L. Говорят, что эта последовательность является фундаментальной: если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall n, m > N$

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

17.02.2021

Лекция 19.

Задача 4 ~~3а~~ Док-ть, что в любом комплексном гильбертовом простр-ве скалярное произведение может быть выражено через норму с помощью след. тождества:

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left[\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) + i\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right)\right].$$

<u>Утв.</u> Если $x_1, x_2 \ldots x_n \ldots$ сходится в нормированном линейном пр-ве L, то она явл. фундаментальной.

Док-во. Пусть $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$. Тогда: $\|x_n - x_m\| = \|(x_n - x_0) - (x_m - x_0)\| \leq$
$\leq \|x_n - x_0\| + \|x_m - x_0\|$. по опр. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: n \geq N \ \|x_n - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Тогда: $\forall m, n \geq N \ \|x_n - x_m\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow x_1 \ldots x_n$ - фундаментальна.

• Замечание: Из мат анализа: последовательность $\mathbb{R}$ чисел фундаментальн., если и только если она имеет конечный предел. Однако в произвольном нормированном простр-ве это не так. В качестве примера рассмотрим множество многочленов в простр-ве $C[a,b]$ с нормой $\|f\| = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$
Мы знаем (предыд. лекция), что P (мн-во многочленов) не замкнуто. мы построили последовательность многочленов, которые сх-ся к $g(x) = \sin x$
По утв. $\Rightarrow \underset{\text{отдельный многочлен} \in P}{P_1(x) \ldots P_n(x)}$ - фундаментальна в $C[a,b]$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow P_1(x) \ldots P_n(x)$ - фундаментальна в P. Если бы эта посл. была сходящейся в P, то существовал бы многоч-н $P_0(x)$ т.ч. $P_n(x) \to P_0(x)$ в P а значит и в $C[a,b]$ (прост-ве непр. функций), <u>но в $C[a,b]$</u>
<u>$P_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sin x \neq P_0(x)$</u>. Это противоречит, что у сх-ся посл. предел может быть только один

Опр. Линейное нормированное пространство наз-ся полным, если в нём всякая фундаментальная последовательность явл. сходящейся

Примеры полных прост-в 1) $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, l_2, l_2(D)$

2) Пусть $p \geq 1$, $l_p = \{(x_1, x_2 \dots, x_n, \dots) \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty\}$

• $x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots x_n+y_n, \dots)$

• $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n \dots)$

$\|x\|_{l_p} = \|x\|_p \overset{\text{опр}}{=} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right\}^{1/p}$

3) Пусть $p \geq 1$, D-область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. $L_p(D) = \{ f: D \to \mathbb{R}$ или $\mathbb{C} \mid \int_D |f(x)|^p dx < +\infty \}$ - лебеговское пространство

$f+g \overset{\text{опр}}{=} f(x)+g(x)$, $(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$, $\|f\|_{L_p(D)} \overset{\text{опр}}{=} \left\{ \int_D |f(x)|^p dx \right\}^{1/p}$

Свойства пространст лебега:

(1) (Неравенство Гёльдера): Если $p>1$, $q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $f \in L_p(D)$, $g \in L_q(D)$ то $f \cdot g \in L_1(D)$, причём $\|f \cdot g\|_{L_1(D)} \leq \|f\|_{L_1(x)} \|g\|_{L_q(D)}$

Замечание: Неравенство Гёльдера явл. точным, в том смысле, что если $f \notin L_p(D)$, то $\exists g \in L_q(D)$, причём $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, и $f \cdot g \notin L_1(D)$ то есть $\int_D |f(x) \cdot g(x)| dx = +\infty$

(2) (Неравенство Минковского). Если $p \geq 1$ и $f, g \in L_p(D)$, то $f+g \in L_p(D)$, причем $\|f+g\|_{L_p(D)} \leq \|f\|_{L_p(D)} + \|g\|_{L_p(D)}$

(3) Пространство $L_p(D)$ является линейным, нормиров, полным $\forall p \geq 1$

Замечание. Если в опр пр-ва $L_p(D)$ интеграл понимать не по Лебегу, а по Риману, то полноты не будет

Замечание В прост-ве $L_p(D)$ функция называется равной нулю, если $\int |f(x)|^p dx = 0$ (Из мат анализа => если $g(x) \geq 0$, то след утв. эквивалентны: а) $\int_D g(x) dx = 0$ б) $\exists$ множество E лебеговой меры 0 такое, что $\forall x \in D$, но $x \notin E$ $g(x) = 0$

5.3 Линейное пространство со скалярным произведением

ОПР Пусть L - линейное пространство. Говорят что в L задано скалярное произведение, если каждой паре векторов $x, y \in L$ сопоставлено число (x, y), называемое скалярным произведением этих векторов, так что выполнены следующие аксиомы скал. произв.
(отображение $L \times L \to \mathbb{R}$ или наз-ся скалярным произв.)

(1) (линейность скаляр. произведения по первому аргументу):
$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha (x, z) + \beta (y, z) \quad \forall x, y, z \in L \quad \forall \alpha, \beta \text{ - числа}$$
(2) (Эрмитова симметричность): $(x, y) = \overline{(y, x)} \quad \forall x, y \in L$

(3) (неотрицательность и невырожденность скаляр. произведения)
$$(x, x) \geq 0 \quad \forall x \in L \quad \text{и} \quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Примеры: (1) $\mathbb{R}$, где $x, y \in \mathbb{R}$, $(x, y) \overset{\text{опр}}{=} xy$; $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$
$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}, \quad x = (x_1 \ldots x_n) \quad y = (y_1 \ldots y_n) \in \mathbb{R}^n \text{ (или } \mathbb{C}^n)$$

(2) $\ell_2 = \{(x_1, \ldots, x_n, \ldots) \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty\}$ со скалярным произведением $(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$. Почему сходится? Потому что он сх-ся абсолютно.
$$|x_n \cdot \overline{y_n}| = |x_n| \cdot |\overline{y_n}| \leq \frac{|x_n|^2 + |y_n|^2}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \cdot |y_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2 + |y_n|^2}{2} =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 < +\infty.$$

Проверяем аксиомы скалярного произв: линейность по первому аргум.
$$(\alpha x + \beta y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) \overline{z_n} = \alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{z_n} + \beta \sum_{n=1}^{\infty} y_n \overline{z_n} = \alpha (x, z) + \beta (y, z)$$
(2) Эрмитова симметр:
$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$
свойство выполнено
$$\overline{(y, x)} = \overline{\sum_{n=1}^{\infty} y_n \cdot \overline{x_n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{y_n} \, \overline{\overline{x_n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{y_n} \cdot x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \overline{y_n}$$
(3) полож. опред. и невырожденность
$$(x, x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{x_n} = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \geq 0 \quad \forall x \in \ell_2$$
Если $(x, x) = 0$, то $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = 0 \Rightarrow \forall n \; x_n = 0 \Rightarrow x = 0$
Если $x = 0$, то $(x, x) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = 0$
} невырожденность док-на.

(3) $L_2(D) = \{f : D \to \mathbb{R} \text{ (или } \mathbb{C}) \mid \int_D |f(x)|^2 dx < +\infty\}$ со скалярным произведением $(f, g) = \int_D f(x) \overline{g(x)} \, dx$. Почему он сх-ся и почему вып. аксиомы скал произвед.?

Подсказка: делать как в предыдущем примере.

Лемма 1. Пусть L – простр. со скалярным произведением. Тогда $\forall x, y \in L$ и $\forall \alpha \in \mathbb{R}^{\text{или } \mathbb{C}}$ справедливы равенства

(1) $(x+y, x+y) = (x,x) + 2\,\mathrm{Re}(x,y) + (y,y)$; (2) $(x, \alpha y) = \bar{\alpha}(x,y)$

(3) $(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|^2 (x, y)$

линейность скал. произв. эрмитова симм.

Док-во: (1) $(x+y, x+y) \overset{A1}{=} (x, x+y) + (y, x+y) \overset{A2}{=} \overline{(x+y, x)} + \overline{(x+y, y)} \overset{A1}{=}$

$= \overline{(x,x) + (y,x)} + \overline{(x,y) + (y,y)} \overset{A3, A2}{=} (x,x) + \underbrace{(x,y) + \overline{(x,y)}}_{2\mathrm{Re}(x,y)} + (y,y)$

(2) $(x, \alpha y) \overset{A2}{=} \overline{(\alpha y, x)} \overset{A1}{=} \overline{\alpha (y,x)} = \bar{\alpha}\,\overline{(y,x)} \overset{A2}{=} \bar{\alpha}(x,y)$

(3) $(\alpha x, \alpha y) \overset{A1}{=} \alpha(x, \alpha y) \overset{A2}{=} \alpha\bar{\alpha}(x,y) = |\alpha|^2 (x,y)$

Лемма 2 (Неравенство Коши-Буняковского-Шварца): Если L – лин. пространство со скалярным произведением, то $\forall x, y \in L$ справедливо нер-во $|(x,y)|^2 \le (x,x)(y,y)$

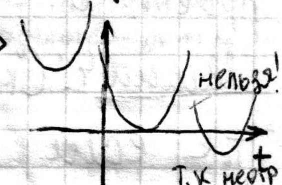
24.02.2020 +1

Лекция 4

Док-во: Пусть $t \in \mathbb{R}$. ~~Тогда~~ $\cancel{\|x+ty\|^2}$. Тогда $0 \overset{A3}{\le} (x+ty, x+ty) \overset{\text{Лемма 1}}{=}$

$= (x,x) + 2\mathrm{Re}(x, ty) + (ty, ty) = (x,x) + 2t\,\mathrm{Re}(x,y) + t^2 (y,y) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{Re}^2(x,x) \le (x,x)(y,y)$



I случай: $(x,y) \in \mathbb{R} \Rightarrow (x,y)^2 \le (x,x)(y,y)$

II случай: $(x,y) \in \mathbb{C} \Rightarrow L$ – линейное прост-во над $\mathbb{C}$ $\quad (x,y) = re^{i\varphi}$

Рассмотрим $\tilde{x} = e^{-i\varphi}\cdot x \in L$. Тогда $(\tilde{x}, y) = (e^{-i\varphi}x, y) = e^{-i\varphi}(x,y) =$

$= e^{-i\varphi}\cdot r \cdot e^{i\varphi} = r$ – модуль компл. числа $= |(x,y)| \in \mathbb{R}$ и мы попали в первый случай. т.е. $(\tilde{x}, y)^2 \le (\tilde{x}, \tilde{x})(y,y) \Leftrightarrow$

$r^2 = |(x,y)|^2 \quad (e^{-i\varphi}x, e^{-i\varphi}x) \overset{Л1:3}{=} |e^{i\varphi}|^2 \cdot (x,x) = 1$

$\Rightarrow |(x,y)|^2 \le (x,x)\cdot(y,y)$ ЧТД

Лемма 3 В любом пространстве L со скалярным произведением $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ задаёт норму.

Проверим, что заданная таким образом функция удовл. аксиомам нормы.

1) неотр. и невырожденность нормы: $\|x\| = \sqrt{(x,x)} \geq 0 \quad \forall x \in L$

$\|x\| = \sqrt{(x,x)} = 0 \Leftrightarrow (x,x) = 0 \overset{A3}{\Leftrightarrow} x = 0$

2) положительная однородность нормы: $\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} \overset{A_1:3}{=} \sqrt{|\alpha|^2 (x,x)} =$

$= |\alpha|\sqrt{(x,x)} \quad \forall x \in L \quad \forall \alpha$-числа

3) неравенство треугольника: $\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) \overset{A_1:1}{=} (x,x) + 2Re(x,y) + (y,y)$

$\leq \|x\|^2 + 2|Re(x,y)| + \|y\|^2 \leq$ $\quad |Re z| \leq |z|$

$\leq \|x\|^2 + 2|(x,y)| + \|y\|^2 \overset{КБШ}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$

Замечание 1 Говорят, что норма, заданная формулой $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ согласована со скалярным произведением в прост-ве L

Замечание 2 Неравенство КБШ. все запоминают в следующем виде $|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Замечание 3 всякое линейное пространство со скалярным произведением автоматически является нормированным пространством. Значит в линейном пространстве со скалярным произведением все понятия, которые мы определили в нормир. простр., предел, предельная точка, замыкание, замкнутое мн-во, полное простр-в.

Лемма 4: Скалярное произведение непрерывно по первому аргументу т.е если $x_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} x$, то $\forall y \in L$, $(x_n, y) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} (x,y)$

Док-во: Нужно доказать, что $(x_n, y) - (x,y) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$

$|(x_n, y) - (x,y)| \overset{A_1}{=} |(x_n - x, y)| \overset{К.Б}{\leq} \|x_n - x\| \cdot \|y\| \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$ ч.т.д

УПР Док-ть, что скалярное произведение непрерывно 1) по второму аргументу. 2) по совокупности своих аргументов.

Лемма 5 „Равенство параллелограмма": Пусть L - лин пространство со скалярным произведением и $\|x\|$ - норма, порожденная скалярным произведением, Тогда: $\forall x, y \in L$

$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

Док-во: $\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) \overset{A_1:1}{=} \|x\|^2 + 2Re(x,y) + \|y\|^2$

$\|x-y\|^2 = (x-y, x-y) = \|x\|^2 - 2Re(x,y) + \|y\|^2$ $\quad \oplus$

$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2\|x\|^2+2\|y\|^2$ ЧТД.

Замечание: Можно доказать обратное, а именно: если равенство параллелограмма выполняется $\forall x, y$, то норма порождается некоторым скалярным произведением. Замечание: Гильбертово прост-во обозначается H.

ОПР: Пространство со скалярным произведением называют гильбертовым, если оно ~~только~~ полно относительно нормы, порождённой этим скалярным произведением.

Примеры: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, ℓ_2, $L_2(D)$

5.4 Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта.

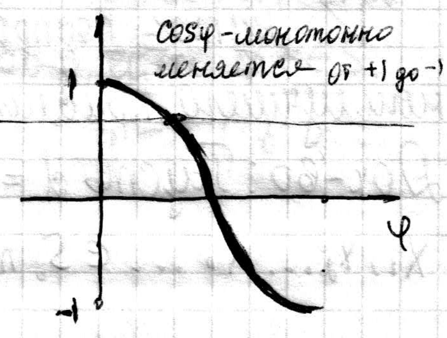
ОПР: Пусть L - лин. пространство со скалярным произведением. Говорят, что векторы x и $y \in L$ ортогональны друг другу, если $(x,y)=0$

Обозн: $x \perp y$.

Упр. Нулевой вектор ортогонален любому вектору из L

ОПР. Пусть L - лин. пространство со скалярным произведением над $\mathbb{R}$! И пусть $x \in L$, $x \neq 0$ и $y \in L$, $y \neq 0$. Тогда углом между векторами x и y наз-ся число $\varphi \in [0, \pi]$ такое, что

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$$



Замечание 1: Это школьная формула.

Замечание 2. Угол φ - существует

$$\left| \frac{(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \right| \overset{\text{К.Б.Ш}}{\leqslant} 1$$

Замечание 3 Угол определён однозначно $\varphi = \arccos \frac{(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$

УПР. Если x, y - ненулевые векторы в пр-в L со скалярным произведением над $\mathbb{R}$, то след. утв. эквивалентны.

(1) $x \perp y$ (2) угол между x и y равен π.

Теорема: (Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта) Пусть L - линейное прост-во со скалярным произведением и $x_1, x_2, \ldots x_n \ldots$ - последовательность линейно независимых векторов в L. Тогда след. последовательности

$y_1 = x_1$ $\qquad z_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$

$y_2 = x_2 - (x_2, z_1) \cdot z_1$ $\qquad z_2 = y_2/\|y_2\|$

$\ldots \qquad \ldots$

$y_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1} (x_n, z_k) z_k$ $\qquad z_n = y_n/\|y_n\|$

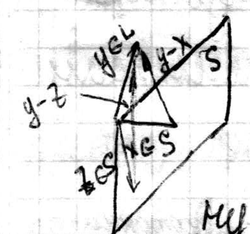
x_0 явл. пределом сх-ся послед. все точки которой $\in S$. и S замкнуто. Значит $x_0 \in S$

Обладают след. свойствами: (1) последовательность векторов $z_1, z_2 \ldots z_n$ явл. ортонормированными т.е: $(z_n, z_k) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq k \\ 1, & \text{если } n = k \end{cases}$

(2) $\forall n$ $L[x_1, \ldots, x_n] = L[z_1, \ldots z_n] = \{\lambda_1 z_1 + \ldots + \lambda_n z_n \mid \lambda_k - \text{числа}\}$

5.5 Вектор наилучшего приближения и ортогональная проекция.

ОПР: Пусть L - лин. пространство со скалярным произведением. S его подпростр. Говорят, что $x \in S$ явл. вектором наилучшего приближения к вектору $y \in L$ с помощью векторов подпрост.-ва S, если $\forall z \in S$ справедливо $\|y - x\| \leq \|y - z\|$, т.е если $\|y - x\| = \inf_{z \in S} \|y - z\|$



$\|y - x\| \leq \|y - z\|$

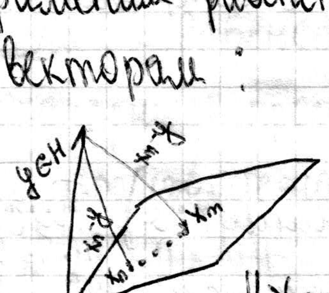
Лемма: Пусть H - гильбертов пространство. S - замкнутое подпростр-во в H. Тогда $\forall y \in H$ $\exists!$ $x \in S$ - вектор наилучшего приближения

Док-во: Пусть $d = \inf_{z \in S} \|y - z\|$. Выберем последовательность векторов $x_1, x_2 \ldots x_n \ldots \in S$, такую, что $\|y - x_n\| \xrightarrow[n \to \infty]{} d$

3.03.2021

Лекция 21 (5).

Применим равенство параллелограмма $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$ к векторам: Рассмотрим $u = x_n - y$, $v = x_m - y$.



$\|(x_n - y) + (x_m - y)\|^2 + \|(x_n - y) - (x_m - y)\|^2 =$

$= 2\|x_n - y\|^2 + 2\|x_m - y\|^2$

$\|x_n - x_m\|^2 = 2\|x_n - y\|^2 + 2\|x_m - y\|^2 - 4\underbrace{\|y - \underbrace{\frac{x_n + x_m}{2}}_{\in S}\|^2}_{\geq d^2 \text{ - из опр. выше}}$ (*)

$\forall \varepsilon>0\ \exists n(\varepsilon): \forall m,n \geq n(\varepsilon)\ \|y-x_n\|^2 \leq d^2+\varepsilon$ и $\|y-x_m\|^2 \leq d^2+\varepsilon$. Значит

$\|x_n-x_m\|^2 \leq 2(d^2+\varepsilon)+2(d^2+\varepsilon)+(-4d^2)=4\varepsilon \Rightarrow x_1,\dots x_n$ - фундаментальна

Т.к. H - гильбертово, то $\exists x_0 \in H$ (условие); $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$, т.е $\|x_n-x_0\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Этот вектор является вектором наилучшего приближения. Перейдём к пределу при $n\to+\infty$ в $\|y-x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} d$ Поскольку последовательность

$\downarrow$

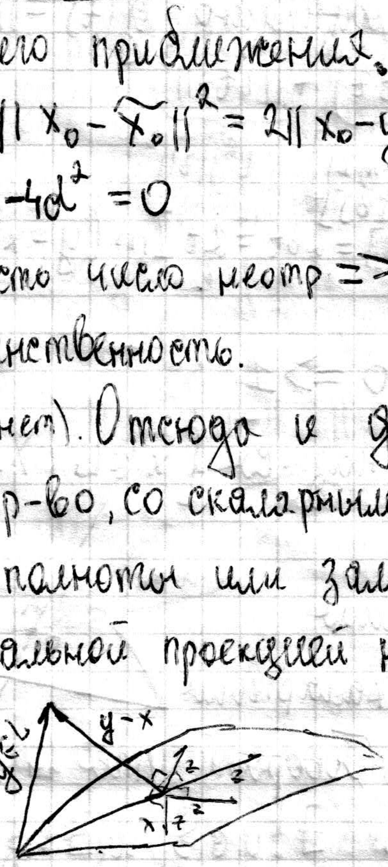
Доказали существ-е $\|y-x_0\|$ имеет только один предел, то $\|y-x\|=d \Rightarrow x$ вектор наил. приб.

Докажем единственность x_0: От противного. Пусть x_0 и $\tilde{x}_0$ - два вектора наилучшего приближения. Подставим в (*) x_0 подст вместо x_n, $\tilde{x}_0 - x_m$: $\|x_0-\tilde{x}_0\|^2 = 2\|x_0-y\|^2+2\|\tilde{x}_0-y\|^2-4\|y-\underbrace{\frac{x_0+\tilde{x}_0}{2}}_{\in S}\|^2 =$
$\leq 2d^2+2d^2-4d^2=0$

квадрат $\|\cdot\|^2$ есть число неотр $\Rightarrow \|x_0-\tilde{x}_0\|=0 \Leftrightarrow x_0-\tilde{x}_0=0 \Leftrightarrow x_0=\tilde{x}_0$ - Это означает единственность.

ОПР (пока еще нет). Отсюда и до конца этого пункта считаем, что L - линейное пр-во, со скалярным произведением и S - его подпростр-во (не требуем полноты или замкн). Опр. Говорят, что вектор $x\in S$ явл. ортогональной проекцией на подпространство S, если $\forall z \in S$.

$y-x \perp z$



Лемма. Следующие два условия эквивалентны

(1) $x\in S$ явл ортогональной проекцией вектора $y\in L$ на S

(2) $x\in S$ явл. вектором наилучшего приближения для вектора $y \in L$ с помощью векторов подпр-ва S

Док-во: основано на формуле 1 из п. 5.3: $(u+v,u+v)=\|u\|^2+2Re(u,v)+\|v\|^2=\|u+v\|^2$

(1) $\Rightarrow$ 2. $x\in S: (y-x,z)=0\ \forall z\in S$. Тогда $\forall z \in S, \|y-z\|^2=$
$=\|\underbrace{(y-x)}_{u}+\underbrace{(x-z)}_{v}\|^2=\|y-x\|^2+2Re\cancel{(y-x,\underbrace{x-z}_{\in S})}^{0}+\underbrace{\|x-z\|^2}_{\geq 0} \geq \|y-x\|^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по опр. x - явл. вектором наилучшего приближения. т.е 2 вып.

② (2) $\Rightarrow$ (1) Дано $\forall z \in S$ $\|y-z\| \geq \|y-x\|$

Рассмотрим вспомогательную функцию: $f(t) = \|y-x+tz\|^2$, где z - некоторый фиксированный, произвольный вектор и S, $t \in \mathbb{R}$

Очевидно, что $\forall t \in \mathbb{R}$ $f(t) = \|y-x+tz\|^2 \geq \|y-x\|^2 = f(0) \Rightarrow t=0$ явл точкой минимума функции $f(t) \Rightarrow f'(0)=0$

$$f(t) = \|(y-x)+tz\|^2 = \|y-x\|^2 + \underbrace{2Re(y-x,tz)}_{2tRe(y-x,z)} + \underbrace{\|tz\|^2}_{t^2\|z\|^2}$$

$$f'(t) = 2Re(y-x,z) + 2t\|z\|^2 \Rightarrow f'(0) = 2Re(y-x,z) = 0$$

Рассмотрим еще одну вспомог функцию $g(t) = \|y-x+itz\|^2$ $t \in \mathbb{R}$

$$g(t) \geq g(0) \text{ и } g(t) = \|y-x\|^2 + \underbrace{2Re(y-x,itz)}_{2Re[(-it)(y-x,z)]} + \underbrace{\|itz\|^2}_{t^2\|z\|^2}$$

$2Re[(-it)(a+ib)]$

$2Re[-ita+bt] = 2bt = 2t\,Im(y-x,z)$

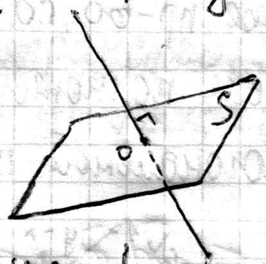
$$g'(t) = 2Im(y-x,z) + 2t\|z\|^2$$

$$g'(0) = 2Im(y-x,z) = 0 \Rightarrow (y-x,z) = 0 \Rightarrow 1$$

ОПР Ортогональным дополнением к S наз-ся $\{x \in L \mid x \perp y\ \forall y \in S\}$

Обозн $S^\perp$.

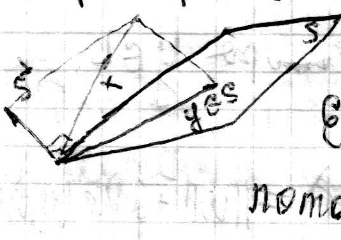
Пример: $L = \mathbb{R}^3$, S - плоскость, $S^\perp$ - прямая



Опр Пусть L - лин пространство со скалярным произведением, S и T - его подпростр-ва. Говорят, что L явл прямой суммой подпростр в S и T, если $\forall x \in L$ $\exists! y \in S$ и $\exists! z \in T$ $x = y+z$

Обозн $L = S \oplus T$.

Пример: $L = \mathbb{R}^3$; S - плоскость, тогда $S \oplus S^\perp = L$



$x = y + s$.

Если S и T не параллельные плоскости в $\mathbb{R}^3$, то $\mathbb{R}^3 \neq S \oplus T$ потому что нет ед.-ти

Теорема: Пусть H - Гильбертово простр-во, S - его замкнутое подпростр-во. Тогда $H = S \oplus S^\perp$

Док-во: Нам нужно док-ть, что $\forall x \in H$ $\exists! y \in S$ $\exists! z \in S^\perp$: $x = y+z$

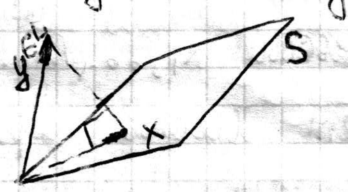
Существование: Обозначим y - вектор наилучшего приближения к вектору $x \in H$ с помощью векторов подпр-ва S. Он существует. Тогда $x = \underbrace{y}_{\in S} + \underbrace{(x-y)}_{\in S^{\perp}}$ - в силу леммы.

Единственность: От противного: Пусть $\exists y, \tilde{y} \in S$ и $\exists z, \tilde{z} \in S^{\perp}$;
$x = y + z = \tilde{y} + \tilde{z} \Rightarrow \underbrace{y - \tilde{y}}_{\in S} = \underbrace{\tilde{z} - z}_{\in S^{\perp}} \Big| \cdot (y-\tilde{y}) \Rightarrow \|y - \tilde{y}\|^2 = (y-\tilde{y}, y-\tilde{y}) =$
$= (\underbrace{\tilde{z} - z}_{\in S^{\perp}}, \underbrace{y - \tilde{y}}_{\in S}) = 0 \Rightarrow \|y - \tilde{y}\| = 0 \Rightarrow y - \tilde{y} = 0 \Rightarrow y = \tilde{y}$. Наконец

$y + z = \tilde{y} + \tilde{z}$ ч.т.д.

(5.6) Проектирование на конечномерное подпространство: Бессель и нер-во

Теорема. Пусть L - лин. пространство со скалярным произведением; S - конечномерное подпространство в L, $x_1 \dots x_n$ - ортонормированный базис в S. Тогда $\forall y \in L$ вектор, задаваемый формулой $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ где $\lambda_k = (y, x_k)$ явл. ортогональной проекцией вектора y на S. При этом $\|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y - x\|^2$. Это равенство наз-ся теоремой Пифагора.



Лекция 22 10.03.2021.

Док-во: I шаг: Убедимся, что $y - x \perp x_k$ $\forall k = 1 \dots n$ т.е. $(y - x, x_k) = 0$
$(y - x, x_k) = (y, x_k) - (x, x_k) = \lambda_k - (\sum_{p=1}^{n} \lambda_p x_p, x_k) = \lambda_k - \sum_{p=1}^{n} \lambda_p \underbrace{(x_p, x_k)}_{\delta_{pk}} =$
$= \lambda_k - \lambda_k = 0$

II шаг: Убедимся, что $y - x \perp z$ $\forall z \in S$.

$z = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$. Тогда $(y - x, z) = (y, z) - (x, z) = (y, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k) - (x, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k) =$
$= \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k} \underbrace{(y, x_k)}_{\lambda_k} - \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k} (x, x_k) = 0$ чтд

$(\sum_{p=1}^{n} \lambda_p x_p, x_k) = \sum_{p=1}^{n} \lambda_p \overbrace{(x_p, x_k)}^{\delta_{pk}} = \lambda_k$

III шаг. Докажем теорему Пифагора: $\|y\|^2 = \|(y - x) + x\|^2 \overset{2 \Lambda \mathcal{C}}{=}$
$= \|y - x\|^2 + 2 \mathrm{Re} \cancel{(y - x, \underbrace{x}_{\in S})}^{0} + \|x\|^2$ чтд.

Опр. Пусть L - линейное пространство со скалярным произв.

$x \in L$; $x_1 \dots x_n, \dots$ - ортонормированная последовательность в L. Тогда говорят, что:

(1) число $\lambda_k = (x, x_k)$ является коэффициентом Фурье вектора x относительно ортонормированной системы векторов $x_1, \dots x_n \dots$

(2) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$ - называют рядом Фурье вектора $x \in L$ относительно ортонормированной системы $x_1, \dots, x_n, \dots$ (здесь λ_k - коэфф Фурье вектора x

__Замечание__ Бесконечный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$ наз-ся сходящимся в L, если сх-ся последовательность $S_N = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k x_k$ его частичных сумм. При этом суммой ряда наз-ся предел частичных сумм: $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k = \lim_{N \to \infty} S_N = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} \lambda_k x_k$

__Теорема__ (нер-во Бесселя): Пусть L - линейное пространство со скалярным произведением, $x \in L$, $x_1, \dots, x_n, \dots$ - ортонормированная последовательность в L; $\lambda_k = (x, x_k)$ - коэф. Фурье вектора x относительно ортонорм последовательности $x_1, \dots, x_n, \dots$ Тогда числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda|^2$ сх-ся и имеет место неравенство Бесселя $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \leq \|x\|^2$

Док-во. Обозначим $S_N = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k x_k$. Из раздела 5.5 $\Rightarrow S_N$ является вектором наилучшего приближения к вектору x с помощью векторов подпространства $L[x_1, \dots, x_N]$. Применим к нему теорему Пифагора: $\|x\|^2 = \|x - S_N\|^2 + \|S_N\|^2 \geq \|S_N\| = \|\sum_{k=1}^{N} \lambda_k x_k\|^2 = \underset{\text{очевидно}}{\sum_{k=1}^{N}} |\lambda_k|^2$, $\sum_{k=1}^{N} |\lambda_k|^2$ - частичная сумма числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$

Переходя к пределу при $N \to \infty$ получаем $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} |\lambda_k|^2 \leq$ $\leq \|x\|^2$ ЧТД.

5.7 Полные и замкнутые ортонормированные системы векторов. Гильбертов базис. Критерий полноты ортонормированной системы. Равенство Парсеваля.

Опр. Ортонормированная система $x_1 \dots x_n, \dots$ векторов линейного пространства со скалярным произведением наз-ся
(1) Полной, если ее нельзя пополнить, т.е. если не существует другой ортонормированной системы $x, x_1, x_2 \dots, x_n, \dots$ называемой пополнением исходной системы $x_1, \dots, x_n \dots$. Другими словами, если из $x \perp x_k \; \forall k$ следует, что $x = 0$
(2) Гильбертовым базисом, если $\forall x \in L$ справедлива формула $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$, где $\lambda_k = (x, x_k)$ – коэф. Фурье.
(3) Замкнутой, если $\forall x \in L$ выполняется равенство $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$ – ур-е замкнутости

Теорема „критерий полноты ортонормированной системы"
Для ортонормированной системы $x_1, \dots, x_n, \dots$ векторов гильбертова пространства H след. условия эквивалентны:
(1) Она полна
(2) она является гильбертовым базисом
(3) Она замкнута.

Док-во: (1)⇒(2) Т.к. $x_1, \dots, x_n, \dots$ – ортонормированна, то $\forall x \in H$ выполняется нер-во Бесселя: $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \le \|x\|^2$, где $\lambda_k \; (x, x_k)$ – коэффициенты Фурье. Значит ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$ сх-ся. По критерию Коши сходимости числового ряда имеем: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \ge n(\varepsilon)$ $\forall p \ge 1 \; \sum_{k=n+1}^{n+p} |\lambda_k|^2 < \varepsilon$.
Обозначим $S_N = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k x_k$. Убедимся, что последовательность $S_1, S_2 \dots S_N$ фундаментальна: $\|S_{n+p} - S_n\|^2 = \|\sum_{k=1}^{n+p} \lambda_k x_k - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k x_k\|^2 = $
$= \|\sum_{n+1}^{n+p} \lambda_k x_k\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |\lambda_k|^2 < \varepsilon$. Так как H – гильбертово пространство, то в нем всякая фундаментальная последовательность сх-ся.
Обозн. $z = \lim_{n \to \infty} S_N = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$

Убедимся, что $z = x$, т.е. $z - x = 0$. Это будет верно, если мы убедимся, что $z - x \perp x_k \; \forall k$. В самом деле: $(z - x, x_k) =$

$=(z, x_k)-(x, x_k) = \left(\sum_{p=1}^{\infty} \lambda_p x_p, x_k\right) - \lambda_k = \sum_{p=1}^{\infty} \lambda_p \underbrace{(x_p, x_k)}_{\delta_{pk}} - \lambda_k = \lambda_k - \lambda_k = 0.$

Значит $x = z = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k \Rightarrow x_1, \dots x_n, \dots$ является гильбертовым базисом.

(2) $\Rightarrow$ (3) Пусть $x, y \in H$, обозначим $\lambda_k = (x, x_k)$, $\mu_k = (y, x_k)$ Т.к $x_1 \dots x_n$ - гильбертов базис, то $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$ $y = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k x_k$. Тогда $(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k, y\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x_k, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overline{(y, x_k)} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overline{\mu_k}\right)$ - **равенство Парсеваля** Подставим сюда $y = x$: $\|x\|^2 = (x, x) =$

$= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overline{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$ - уравнение замкнутости $\forall x \Rightarrow$ Система замкнута.

(3) $\Rightarrow$ (1) Пусть система $x_1, \dots x_n \dots$ замкнута и $x \in H$ такое, что $x \perp x_k$ $\forall k$. $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 = \lambda_k = (x, x_k) = 0$ $\forall k \Leftrightarrow \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\lambda_k (x, x_k)$ $\forall k$

Значит система $x_1 \dots x_n \dots$ - полная.

<u>Теорема</u> „о существовании гильбертого базиса" без док-ва: Во всяком сепарабельном гильбертовом простр-ве ненулевой размерности сущ-ет гильбертов базис

17.03.2021.

Лекция 7 (23)

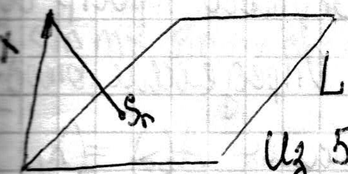
(5.8) Теорема Рисса - Фишера: Изоморфизм гильбертовых простр.-в.

<u>Теорема</u>: (Рисса - Фишера) Пусть H - гильбертово простр-во. и $x_1 \dots x_n$ ортонормированная последовательность в H и пусть $\lambda_1 \dots \lambda_n$ - произв. комплексные числа, такие, что $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 < +\infty$. Тогда $\exists!$ $x \in H$ такой, что $\lambda_k = (x, x_k)$ и $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$

Док-во: Обозначим $S_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$. В (5.7) была теорема, критерий полноты ортонормированной системы при док-ве 1) $\Rightarrow$ 2 мы убедились, что посл-сть $S_1, S_2, \dots S_n$ явл фундаментальной. Значит $S_1 \dots S_n$ сх-ся.

Обозначим $x = \lim S_n$. Убедимся, что x явл. искомым.

$(x, x_k) = \left(\lim_{n \to \infty} \sum_{p=1}^{n} \lambda_p x_p, x_k\right) \overset{\text{непр. аргум.}}{=} \lim_{n \to \infty} \sum_{p=1}^{n} \lambda_p \underbrace{(x_p, x_k)}_{\substack{\text{индекс крон-ра} \\ \delta_{pk}}} = \lambda_k$



$L[x_1 \ldots x_n]$ - линейная оболочка

Из 5.6 $\Rightarrow S_n$ является вектором наилучшего приближения к вектору x с помощью векторов подпространства $L[x_1, \ldots, x_n]$, причём

$$\|x\|^2 = \underbrace{\|x - S_n\|^2}_{\to 0 \text{ при } n\to\infty} + \|S_n\|^2 \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \Rightarrow \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$$

$$\|S_n\|^2 = \Big\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\Big\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$$

Докажем единственность: Пусть $x = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ (тогда $\lambda_k = (x, x_k)$ и $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$) и пусть $\exists \tilde{x} \in H$: $\lambda_k = (\tilde{x}, x_k)$ и $\|\tilde{x}\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$

Убедимся, что $x = \tilde{x}$:

$$\|x - \tilde{x}\|^2 = \underbrace{\|x\|^2}_{\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2} - 2\operatorname{Re}(x, \tilde{x}) + \underbrace{\|\tilde{x}\|^2}_{\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2}$$

$$(x, \tilde{x}) = \Big(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k, \tilde{x}\Big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underbrace{(x_k, \tilde{x})}_{\overline{(\tilde{x}, x_k)} = \overline{\lambda_k}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \overline{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$$

Итого:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 - 2\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|x - \tilde{x}\| = 0$$

<u>Опр.</u> Говорят, что л.п. L и K со скалярным произведением изоморфны, если существует отобр-е $A: L \to K$ и $B: K \to L$ - линейные, сохраняют скалярное произведение и взаимно обратные; т.е

$$\left.\begin{aligned} & A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y) \\ & (A(x), A(y))_K = (x, y)_L \\ & B(\alpha u + \beta v) = \alpha B(u) + \beta B(v) \\ & (B(u), B(v))_L = (u, v)_K \\ & B(A(x)) = x \\ & A(B(u)) = u \end{aligned}\right\} \begin{aligned} & \forall x, y \in L \\ & \forall u, v \in K \\ & \forall \alpha, \beta \text{ - число.} \end{aligned}$$

Замечание: Интуитивно фраза „L и K изоморфны" означает, что K получено из L переобозначением, т.е вместо вектора $A(x) \in K$ будем писать вектор $x \in L$

<u>Теорема</u>: Всякое сепарабельное бесконечномерное гильбертово прост-во H (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) изоморфно ℓ_2 (над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$)

Идея док-ва: Пусть H-сепар. бесконечномерное гильбертово простр-во. Обозначим $x_1 \dots x_n$ - ортонормированный базис в H. Определим отображение $A: H \to \ell_2$ с помощью ф-лы $\forall x \in H$, положим $A(x) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots)$ где $\lambda_n = (x, x_n)$. Почему $(\lambda_1 \dots, \lambda_n \dots) \in \ell_2$. Это следует из неравенство Бесселя $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \leq \|x\|^2 < +\infty$

Почему A линейно? Т.к скал. произведение линейно по 1-му аргументу.

$x \in H$, $\lambda_k (x, x_k)$, $y \in H$, $\mu_k = (y, x_k)$. Тогда:

$A(\alpha x + \beta y) = (\nu_1, \dots, \nu_k, \dots)$, где $\nu_k = (\alpha x + \beta y, x_k) = \alpha (x, x_k) + \beta (y, x_k) =$
$= \alpha \lambda_k + \beta \mu_k \Rightarrow A(\alpha x + \beta y) = (\alpha \lambda_1 + \beta \mu_1, \alpha \lambda_2 + \beta \mu_2, \dots, \alpha \lambda_k + \beta \mu_k, \dots) =$
$= \alpha (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots) + \beta (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k, \dots) = \overbrace{\alpha A(x) + \beta A(y)}$

Почему A сохраняет скаляр произв-ие? $(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overline{\mu_k}$ (равенство Парсеваля) $=$
$= \left((\lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots), (\mu_1, \dots, \mu_2, \dots) \right)_{\ell_2} = (A(x), A(y))_{\ell_2}$.

Определим отображение $B: \ell_2 \to H$ с помощью теоремы Рисса-Фишера.
Нам дан $(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots) \in \ell_2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 < +\infty \Rightarrow \exists! \, x \in H: \forall k \; \lambda_k (x, x_k)$ и
и $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$ $B(\lambda_1, \dots \lambda_k) = x \in H$.

B - линейно, сохраняется скал. произв. и A и B взаимно обратимы.
Значит H и ℓ_2 изоморфны. ЧТД.

(5.4) Тригонометрическая система как пример полной ортонормированной системы в $L_2[-\pi; \pi]$

Напоминание, $L_2[-\pi; \pi] = \{ f: [-\pi; \pi] \to \mathbb{R} \mid \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx < +\infty \}$. в L_2 скал. произв задается формулой $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$

На языке рядов Фурье
Сентябр 2020

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \neq 0 \\ 2\pi & n = m = 0 \end{cases}$$

На языке гильбертовых простр-в.
Последовательность $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \dots \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \dots$
является ортонормированной

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{если } m \neq n \\ \pi & \text{если } m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0 \quad \forall m, n$$

Коэфф. Фурье задаются формулами

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \, dx, \quad n = 1, 2 \ldots$$

$$\alpha_0 = \left(f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, a_0$$

$$\alpha_n = \left(f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\pi}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \sqrt{\pi}\, a_n$$

$$\beta_n = \left(f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\pi}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \sqrt{\pi}\, b_n$$

Ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$f(x) = \alpha_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \alpha_1 \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x + \beta_1 \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x + \ldots +$$
$$+ \alpha_n \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx + \beta_n \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx + \ldots =$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}a_0 + \sqrt{\pi}\,a_1\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x + \sqrt{\pi}\,b_1\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x + \ldots +$$
$$+ \sqrt{\pi}\,a_n\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx + \sqrt{\pi}\,b_n\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx =$$
$$= \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n\cos nx + b_n \sin nx + \ldots$$

Равенство Ляпунова

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$$

Равенство Парсеваля или ур-е замкнутости

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^2 = \|x\|^2$$

$$\alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_k^2 + \beta_k^2) = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx.$$

$$\frac{\pi}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(\pi a_k^2 + \pi b_k^2) = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$$

$$\Downarrow$$

Тригонометрическая система явл. гильб. базисом в L_2

Вопрос: Бывают ли в $L_2(a, b)$ другие ортонормированные гильбертовы базисы кроме тригонометр? Может ли такой базис состоять из алгебраич. многочленов.